Ingen hjelpemiddel er tillatne.
Ta med **all mellomrekning** som trengst for å grunngje svaret.

Oppgåve 1 .... *(20%)*

La den stokastiske variabelen X være summen av to uniformt fordelte slumptall i intervalelt $[0, 1]$. Sannsynlighetstettheten er:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0, \\ x & \text{for } 0 < x < 1, \\ 2 - x & \text{for } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{for } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Kva er utfallsrommet for eksperimentet?

> **Solution:** Utfallsrommet er (det lukka) intervallet $[0, 2]$.

(b) Plott sannsynlighetstetthetsfunksjonen (PDF) på millimeterpapir.

(c) Rekn ut forventningsverdien μ for X.

> **Solution:** Utfallsrommet er (det lukka) intervallet $[0, 2]$.

(d) Rekn ut standardavviket σ for X.

(e) Rekn ut den kumalative fordelingsfunksjonen $F(X)$.
Vi trekker seks tall fra denne fordelingen og får (avrundet på to desimaler):

$$\{1{,}02; 1{,}29; 1{,}43; 1{,}21; 0{,}49; 0{,}70.\}$$

(f) Rekn ut utvalgsmiddelverdien.

(g) Rekn ut utvalgsvariansen.

(h) Gi den empiriske sannsynlighetsfordelingen for X basert på utvalget. Bruk en binstørrelse på 0,5.

(i) Gi den empiriske kumulative sannsynlighetsfordelingen for X basert på utvalget.

Oppgåve 2 .... *(3%)*

Lat $\bar{X}$ vera gjennomsnitt av n identisk og uavhengig fordelte stokastiske variablar kvar med forventing μ og varians σ^2. Kva er $\mathsf{var}(\bar{X})$ lik?

Oppgåve 3 .... *(12%)*

Me ynsker å finna gjennomsnittsfarta til køyretya på ein bestemt vegstrekning. Ti køyrety vert målt, og me finn fart i km/h:

$$78, 67, 82, 95, 85, 79, 86, 89, 92, 75$$

(a) Rekna ut utvalsgjennomsnittet.

(b) Rekna ut utvalsstandardavviket.

(c) Bruk t-fordelinga og rekna ut eit 95% konfidentsinterval for forventa fart.

(d) Kva føresetnad(er) må du gjera for at t-fordelinga skal vera gyldig?

Oppgåve 4 . . . . *(7%)*

Kommunikasjonssystem er utsett for støy, og feilkorrigerande kodar vert brukt for å sikra robust kommunikasjon. Likevel førekjem feil. Forklar korleis du kan bruka ein simulator til å estimera sannsynet for dekodingsfeil i eit slikt kommunikasjonssystem.

Oppgåve 5 . . . . *(9%)*

Vi vil simulere et rovdyr-byttedyr-system av to arter fisk som lever i en innsjø. Det er kjent at fisk av type A hovedsakelig lever av fisk av type B, og at fisk av type B ikke har andre naturlige fiender enn fisk av type A. Svingninger i populasjonene er blitt observert.

Kva slags type simulering er best egnet i de følgende tilfellene? Forklar ditt svar. Velg fra differensiallikninger, Gillespie-algoritmen, og en cellulær automaton-simulering.

I tilfellet:

(a) Begge arter beveger seg raskt, og krysser hele innsjøen flere ganger per dag. Antallene fisk av begge er kjent å være store, også på bunnen av svingningsperiodene.

(b) Begge arter beveger seg raskt, og krysser hele innsjøen flere ganger per dag. Det er kjent at antallet fisker av type A kan være så lite som 50 på bunnen av en svingningsperiode.

(c) Innsjøen er stor, og fiskene lever i grupper.

Oppgåve 6 . . . . *(8%)*

I denne oppgåva skal me kasta terning.

(a) Rekn ut forventningsverdi og populasjonsstandardavvik for et kast med en firesidet terning med utfallsrom $\{1, 2, 3, 4\}$.

For en sekssidet terning er forventningsverdien lik 3,5 og populasjonsstandardavvik lik $\sqrt{35/12}$.

(b) Vi kaster 10 firkantete og 5 sekskantete terninger. La den stokastiske variabelen X være summen av antall øyne på alle 15 terningene. Rekn ut forventningsverdi μ og standardavvik σ for X.

Oppgåve 7 . . . . *(15%)*

En partikkel beveger seg over en raster. Hvert tidssteg beveger den seg med 90% sannsynlighet mot høyre, og med 10% sannsynlighet mot venstre.

(a) Kva er sannsynsfordelinga etter to tidssteg, hvis den begynner på rasterposisjon $i = 0$ på tidspunkt $n = 0$?

(b) Kva er punktsannsynligheten $p(x)$ for at partikkelen etter n tidssteg har tatt eksakt x steg mot høyre (og $n - x$ steg mot venstre)?

(c) Vis at sannsynlighetsfordelingen til posisjonen etter ett tidssteg har middelverdi $\mu = 0.8$ og standardavvik $\sigma = 0.3$.

(d) Gi verdiene for μ og σ etter 10000 tidssteg.

(e) Gi et 99% konfidensintervall for posisjonen etter 10000 tidssteg.

Oppgåve 8 .... *(11%)*

Vi simulerer den følgende rovdyr-byttedyrmodellen med Gillespie-algoritmen:

$$X \rightarrow 2X \text{ med rate } \alpha \times N_X, \tag{1}$$
$$X + Y \rightarrow Y \text{ med rate } \beta \times N_X \times N_Y, \tag{2}$$
$$Y \rightarrow \emptyset \text{ med rate } \gamma \times N_Y, \text{og} \tag{3}$$
$$Y \rightarrow 2Y \text{ med rate } \delta \times N_X \times N_Y. \tag{4}$$

Her antyder X byttedyr, Y rovdyr, N_X antallet byttedyr og N_Y antallet rovdyr i systemet.

(a) Forklar hvilke hendelsene beskrives av likning (1)–(4). Forklar også ratene.
Vi begynner simuleringen med 200 byttedyr ($N_X = 200$) og 20 rovdyr ($N_Y = 20$), og bruker ratene $\alpha = 10/\text{år}$, $\beta = 0.1/\text{år}$, $\gamma = 0.1/\text{år}$ og $\delta = 0.01/\text{år}$.

(b) Regn ut ratene for likning 1-4 ved starten av simuleringen.

(c) Hva er sannsynligheten for at den første hendelsen som skjer er hendelse 3?

(d) Hva er mest sannsynlig: at antallet byttedyr øker eller minker fra begynnelsen av simuleringen?

Oppgåve 9 .... *(15%)*

Gjeve fylgjande datasett av parvise observasjonar:

x	2	4	6	8
y	-6	3	15	24

Du skal gjera ein regresjonsanalyse.

(a) Anvend minstekvadratsummens metode for å finne for hvilke verdier av a og b linja $y = a + bx$ best beskriver datasettet.

(b) Plot datapunktene og linja sammen i en graf på millimeterpapir.

(c) Rekn ut utvalgskovariansen for datasettet.

(d) Rekn ut utvalgskorrelasjonskoeffisienten for datasettet.

(e) Rekn ut et 95%-konfidensintervall for stigningstallet b.