Eksamen 11. mai 2015 **IR201812 Statistikk og Simulering**
Eksamenstid 4 timar *Nynorsk*

Ingen hjelpemiddel er tillatne.
Ta med **all mellomrekning** som trengst for å grunngje svaret.

Oppgåve 1 .... *(10%)*

Lat X og Y vera uavhengige stokastiske variablar trekt uniformt frå $\{0, 1\}$. Lat $Z = X \cdot Y \mod 2$. (Dersom me tolkar 0 som usann og 1 som sann, er Z logisk «X og Y».)

(a) Kva meiner me med at X og Y er uavhengige?

(b) Kva er utfallsrommet til Z?

(c) Set opp sannsynsfordelinga til Z i ein tabell.

(d) Kva er forventingsverdien $E(Z)$?

(e) Kva er variansen $\mathsf{var}(Z)$?

Oppgåve 2 .... *(6%)*

Me kastar ein rettferdig mynt to gongar. Lat den stokastiske variabelen X vera talet på kron i løpet av desse to kasta. Rekn ut forventingsverdien $\mu = E(X)$ på to måtar, der du viser utrekninga i detalj:

(a) ved hjelp av utfallsrommet $\mathcal{S}$ og formelen

$$\mu = \sum_{x \in \mathcal{S}} x \cdot p(x)$$

(b) ved hjelp av populasjonen $\mathcal{P}$ og formelen

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathcal{P}} x$$

Me gjentek eksperimentet fire gongar og får utvalet $\mathcal{U} = \{2, 0, 1, 1\}$.

(c) Rekn ut utvalsmiddelverdien $\overline{x}$.

Oppgåve 3 .... *(4%)*

Bruk sannsynstabellane i boka og finn fylgjande:

1. $P(Z < -0{,}5)$ der $Z \sim N(0, 1)$ (standard normalfordeling)
2. Den kritiske verdien t slik at $P(T > t) = 0{,}05$ når T har Students t-fordeling med fem fridomsgradar.

Oppgåve 4 .... *(7%)*

Ein partikkel finst i eit firkanta, todimensjonalt raster med uendeleg utstrekking. For kvart tidssteg går partikkelen eitt steg til ein av dei fire naboposisjonane med fylgjande sannsynsfordeling:

	40%	
30%	*start*	30%
	0%	

(a) Rekn ut sannsynsfordelingen for posisjonen etter to steg.

(b) Rekn ut sannsynsfordelingen for posisjonen etter tre steg.

Oppgåve 5 .... *(8%)*

Ein stokastisk variabel X er binomialfordelt med $n = 10$ forsøk og punktsannsyn $\pi = 0{,}2$.

(a) Rekn ut sannsynet $P(X \leq 2)$.

Ein annen stokastisk variabel Y er binomialfordelt med $n = 10000$ forsøk og punktsannsyn $\pi = 0{,}2$.

(b) Rekn ut forventingsverdien $E(Y)$.

(c) Rekn ut variansen σ^2 for Y.

(d) Finn sannsynet $P(Y \leq 2000)$. Forklar korleis du finn svaret.

Oppgåve 6 .... *(10%)*

Eit dataprogram skal simulera ein rettferdig firesida terning.

(a) Rekn ut forventingsverdien μ til terningen.

Me testar dataprogrammet ved å køyra det 10000 gongar og finn:

Tal på augo	Frekvens
1	2411
2	2340
3	2654
4	2595

Middelverdien over utvalet er 2,5433 og standardavviket er 1,2494.

(b) Finn eit 99% konfidensintervall for forventingsverdien μ for talet på augo per terningkast i dette dataprogrammet.

(c) Verkar denne virtuelle terningen rettferdig? Bruk svara i oppgåve a) og b) for å grunngje svaret ditt.

Oppgåve 7 .... *(10%)*

I denne oppgåva ser me på agent-basert simulering.

(a) Forklar hovudprinsippa ved agent-basert simulering. Kva kjenneteiknar ein agent?

Sjå for deg ein økonomisk modell der agentane er bedriftar som kan kjøpa og selja varer og aksjar. Ved implementasjon er det naturleg, i alle fall, å ha ein *simulator*-klasse og ein *agent*-klasse, gjerne med underklassar.

(b) Forklar kva ansvar og oppgåver *agent*-klassen har.

(c) Forklar kva ansvar og oppgåver *simulator*-klassen har.

Oppgåve 8 .... *(9%)*

På ein veg med fartsgrense på 80 km/h måler me farten på politibilar. Fire politibilar køyrer forbi i løpet av ein time, og farten vert målt til 90, 88, 80 og 94 km/h. Gå ut frå at farten på politibilar på denne vegen er normalfordelt. Har me statistisk grunnlag for å seia at gjennomsnittleg fart for politibilar ligg over fartsgrensa på denne vegen? Formuler dei hypotesane som du treng, og test på 5% signifikansnivå.

Oppgåve 9 .... *(12%)*

I mange formar for simulering, vert landskapet modellert som eit rutenett eller raster (*grid*). På yttergrensene av rutenettet må ein ta særskilde omsyn, og der finst ulike randvilkår som kan brukast.

Tenk på ei agent-basert simulering, og sjå på kva som skjer når ein agent kjem til ytterkanten av rutenettet. Gje tre døme på ulike randvilkår, og forklar korleis du vil programmera oppførselen åt agenten i kvart tilfelle.

Oppgåve 10 .... *(10%)*

Me simulerer ein veg og tel bilane som passerer ein vegeskil per tidseining.

Tid (min)	Antall biler
3	102
6	193
9	292
12	399

For datasettet gjeld:

$$\sum x = 30$$
$$\sum y = 986$$
$$\sum x^2 = 270$$
$$\sum y^2 = 292118$$
$$\sum xy = 8880.$$

(a) Bruk minste kvadratsum-metoden for å finna den beste rette lina for å beskriva datasettet.

(b) Rekn ut korrelasjonskoeffisienten mellom tid og talet på bilar.

Oppgåve 11 .... *(14%)*

Ein partikkel rører seg i eit éin-dimensjonalt raster. Sannsynsfordelinga for rørsla i kvart tidssteg er som fylgjer:

Rørsle	Sannsyn
I ro	30%
Eitt steg til venstre	25%
Eitt steg til høgre	25%
To steg til venstre	10%
To steg til høgre	10%

Lat X vera rørsla i løpet av t tidssteg, der negativ verdi viser rørsle mot venstre og positiv mot høgre.

(a) Vis at $\mu = E(X) = 0$ for $t = 1$.

(b) Vis at $\mu = E(X) = 0$ for vilkårleg t.

(c) Rekn ut diffusjonskoeffisienten til partikkelen. Formelen er $E(X^2) = 2dDt$ der $d = 1$ er talet på dimensjonar, D er diffusjonskoeffisienten og t er tida.

(d) Forklar kvifor $E(X^2)$ (forventningsverdi for kvadratisk forflytning) etter eitt tidssteg er lik variansen $\mathsf{var}(X)$.

Partikkelen byrjar på tid $t = 0$ og posisjon $p_0 = 500$. Lat den stokastiske variabelen Y vera posisjonen til partikkelen etter $t = 1000$ tidssteg.

(e) Rekn ut forventingsverdien $\mu = E(Y)$.

(f) Rekn ut variansen $\sigma_Y^2 = \mathsf{var}(Y)$ åt Y.

(g) Kva fordeling har Y? Grunngje svaret.