Eksamen 29. november 2012 **IR102512 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{-2, 0, 2\}$ og $B = \{-1, 0, 1\}$. Finn $A \cup B$ og $A \cap B$.

(b) Regn ut og skriv på rektangulær form $z = \dfrac{3+i}{1+2i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at $AB \neq BA$.

Oppgave 2 .... *(6%)*

Løs likningssystemet ved å bruke Gauss-eliminasjon.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 3 .... *(12%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)
$$f(x) = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16}$$

(b)
$$g(x) = \sin^2(2x)$$

Oppgave 4 .... *(12%)*

Finn integralene

(a)
$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\, dx$$

(b)
$$\int (x^2+1)e^{2x}\, dx$$

Oppgave 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen er lærebok, formelsamling fra videregående skole og kalkulator tillatt. *Håndskrevne notater i lærebok og formelsamling er lov. Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 6 .... *(6%)*

Sett opp integralet for lengden av kurven $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for lengden. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Oppgave 7 .... *(5%)*

En kurve er gitt ved $y^2(1 + 2x) = 1$. Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Finn så et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(0, 1)$.

Oppgave 8 .... *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, for $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ med senter i $a = 0$.

Oppgave 9 .... *(12%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x$ og $g(x) = x^3$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgave 10 .... *(12%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

(b) $y'' + 4y = x^2$.

Oppgave 11 .... *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = y^2(1 + 2x)$$

med startbetingelse $y(-1) = 1$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(0)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.5$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(0)$.

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{-2, 0, 2\}$ og $B = \{-1, 0, 1\}$. Finn $A \cup B$ og $A \cap B$.

(b) Rekn ut og skriv på rektangulær form $z = \dfrac{3+i}{1+2i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at $AB \neq BA$.

Oppgåve 2 .... *(6%)*

Løys likningssystemet ved å bruke Gauss-eliminasjon.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Oppgåve 3 .... *(12%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)

$$f(x) = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(2x)$$

Oppgåve 4 .... *(12%)*

Finn integrala

(a)

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx$$

(b)

$$\int (x^2+1)e^{2x}\,dx$$

Oppgåve 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og formelsamling frå vidaregåande skule lovleg. *Handskrivne notat i lærebok og formelsamling er lovleg. Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 6 .... *(6%)*

Sett opp integralet for lengda av kurva $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for lengda. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Oppgåve 7 .... *(5%)*

Ei kurve er gitt ved $y^2(1 + 2x) = 1$. Bruk implisitt derivasjon til å finne eit uttrykk for y'.

Finn så eit uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(0, 1)$.

Oppgåve 8 .... *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, for $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ med senter i $a = 0$.

Oppgåve 9 .... *(12%)*

Grafane til funksjonane $f(x) = x$ og $g(x) = x^3$ avgrensar eit flatestykke F i første kvadrant med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgåve 10 .... *(12%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

(b) $y'' + 4y = x^2$.

Oppgåve 11 .... *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = y^2(1 + 2x)$$

med startverdi $y(-1) = 1$.

(a) Finn ein tilnærma verdi for $y(0)$ ved Euler's metode med steglengd $h = 0.5$.

(b) Finn løysninga $y(x)$ eksakt og rekn ut $y(0)$.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(15%)*

(a) La $A = \{-2, 0, 2\}$ og $B = \{-1, 0, 1\}$. Finn $A \cup B$ og $A \cap B$.

(b) Regn ut og skriv på rektangulær form $z = \dfrac{3+i}{1+2i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(c) La $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vis at $AB \neq BA$.

Løsning. (a) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ og $A \cap B = \{0\}$.

(b)

$$z = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-2i^2+i-6i}{1-4i^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i.$$

(c) Regner og finner

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{mens} \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Oppgave 2 .... *(6%)*

Løs likningssystemet ved å bruke Gauss-eliminasjon.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Løsning. Setter opp utvidet koeffisientmatrise og radreduserer.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ser at $x_3 = -1$, så da blir $x_2 = 3 + 2x_3 = 3 - 2 = 1$ og $x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 = 1 - 2 - 1 = -2$. □

Oppgave 3 .... *(12%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(2x)$$

Løsning. (a)

$$f'(x) = x^3 \ln x + \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{4x^3}{16} = x^3 \ln x.$$

(b)

$$g'(x) = 2\sin(2x)\cos(2x)2 = 4\sin(2x)\cos(2x) = 2\sin(4x).$$

□

Oppgave 4 .... *(12%)*

Finn integralene

(a)

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx$$

(b)

$$\int (x^2+1)e^{2x}\,dx$$

Løsning. (a) **Alternativ I. Delbrøk.**

$$\frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

Likning: $x+4 = A(x+1)+B$. x-ledd: $1 = A$. k-ledd: $4 = A+B$. Så $B = 4-A = 3$. I begge integralene under lar vi $u = x+1$ så $du = dx$.

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du + 3\int u^{-2}\,du$$
$$= \ln|u| - 3u^{-1} + C = \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

Alternativ II. Substitusjon La $u = x+1$. Da er $du = dx$ og $x+4 = u+3$, så

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{u+3}{u^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du + 3\int u^{-2}\,du$$
$$= \ln|u| - 3u^{-1} + C = \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C.$$

Alternativ III. Delvis integrasjon Deriverer $(x+4)$ og integrerer $(x+1)^{-2}$.

$$\begin{array}{c|c|c} + & x+4 & (x+1)^{-2} \\ - & 1 & -(x+1)^{-1} \\ + & 0 & -\ln|x+1| \end{array}$$

Tilsammen

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{x+4}{x+1} + \ln|x+1| + C = -\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} + \ln|x+1| + C$$

Siden $(x+1)/(x+1) = 1$ kan vi sette $C_1 = -1 + C$ og få samme svar som over.

(b) Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$$\begin{array}{c|c|c} + & x^2+1 & e^{2x} \\ - & 2x & \frac{1}{2}e^{2x} \\ + & 2 & \frac{1}{4}e^{2x} \\ - & 0 & \frac{1}{8}e^{2x} \end{array}$$

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\int (x^2+1)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2)e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

□

Oppgave 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x}$$

Løsning. Bruker l'Hopitals regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^2}{e^x + x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 2x}{e^x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{2}{e^x} = 1 + 0 = 1.$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 6 .... *(6%)*

Sett opp integralet for lengden av kurven $f(x) = \frac{2}{5}x^{5/2}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for lengden. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Løsning. $f'(x) = \frac{2}{5}\frac{5}{2}x^{3/2} = x^{3/2}$, så $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \sqrt{1 + x^3}dx$. Integralet for buelengden blir

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx.$$

Simpsons metode 4 delintervall gir punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ og $x_4 = 1$ og $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} s \approx S_4 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{12}\left(\sqrt{1 + 0^3} + 4\sqrt{1 + (\frac{1}{4})^3} + 2\sqrt{1 + (\frac{1}{2})^3} + 4\sqrt{1 + (\frac{3}{4})^3} + \sqrt{1 + 1^3}\right) \\ &= \frac{1}{12}(1 + 4 \cdot 1.0078 + 2 \cdot 1.0607 + 4 \cdot 1.1924 + 1.4121) = 1.1114. \end{aligned}$$

□

Oppgave 7 .... *(5%)*

En kurve er gitt ved $y^2(1 + 2x) = 1$. Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Finn så et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(0, 1)$.

Løsning. Deriverer begge sider

$$\frac{d}{dx}(y^2(1 + 2x)) = 2yy'(1 + 2x) + y^2(2) = 0 = \frac{d}{dx}(1).$$

Det gir

$$2yy'(1 + 2x) = -2y^2$$

så

$$y' = \frac{-2y^2}{2y(1 + 2x)} = \frac{-y}{1 + 2x}.$$

Alternativt: Del vekk $(1 + 2x)$ på begge sider. Skriv $y^2 = (1 + 2x)^{-1}$ og deriver begge sider

$$2yy' = -(1 + 2x)^{-2} \cdot 2 \Rightarrow yy' = -(1 + 2x)^{-2} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(1 + 2x)^2 y} = \frac{-1}{(1 + 2x)\frac{1}{y^2}y} = \frac{-y}{1 + 2x}$$

Setter inn $x = 0$ og $y = 1$ i den deriverte og får stigningstall

$$a = y'\big|_{(0,1)} = \frac{-1}{1 + 2 \cdot 0} = -1.$$

Ettpunktsformelen gir tangentlinja

$$y = y_0 + a(x - x_0) = 1 - 1(x - 0) = 1 - x.$$

$\square$

Oppgave 8 .... *(5%)*

Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, for $f(x) = \frac{1}{1+x}$ med senter i $a = 0$.

Løsning. Vi finner $f(x) = (x+1)^{-1}$, $f'(x) = -(x+1)^{-2}$ og $f''(x) = 2(x+1)^{-3}$.
Setter inn $x = 0$. $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$ og $f''(0) = 2$. Det gir Taylor polynomet

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 = 1 - x + \frac{2}{2}x^2 = 1 - x + x^2.$$

$\square$

Oppgave 9 .... *(12%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x$ og $g(x) = x^3$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Løsning. Fra $x = x^3$ ser vi at grafene skjærer hverandre i $x = 0$ og $x = 1$ i første kvadrant. (Også i $x = -1$...)

(a) Finner arealet

$$A = \int_0^1 x - x^3 \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 + 0 = \frac{1}{4}.$$

(b) Finner moment om y-aksen

$$M_{x=0} = \int_0^1 x(x - x^3) \, dx = \int_0^1 x^2 - x^4 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 + 0 = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15}$$

og moment om x-aksen

$$\begin{aligned} M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x)^2 - (x^3)^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^6 \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} - 0 + 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7-3}{21}\right) = \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Vi har $m = A$ fra punkt (a). Så

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{15} \qquad \text{og} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{1}{4}} = \frac{8}{21}.$$

$\square$

Oppgave 10 .... *(12%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

(b) $y'' + 4y = x^2$.

Løsning. (a) Karakteristisk likning $r^2 - 3r + 2 = 0$. Fra *abc*-formelen får vi $r_1 = 2$ og $r_2 = 1$:

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Vi er i tilfelle I med generell løsning

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{x}.$$

(b) Ikke-homogen likning. Karakteristisk likning $r^2 + 4 = 0$. Løsninger $r^2 = -4$, så $r = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Vi er tilfelle III med $k = 0$ og $\omega = 2$. Homogen løsning.

$$y_h(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Siden høyre-sida $f(x) = x^2$ er andre-grad polynom gjetter vi $y_p(x) = C_2x^2 + C_1x + C_0$.

Deriverer og setter inn $y_p'(x) = 2C_2x + C_1$ og $y_p''(x) = 2C_2$.

$$y_p'' + 4y_p = 2C_2 + 4(C_2x^2 + C_1x + C_0) = x^2.$$

Må ha $4C_2 = 1$, $4C_1 = 0$ og $2C_2 + 4C_0 = 0$. Da blir $C_2 = \frac{1}{4}$ og $C_0 = -\frac{2}{4}C_2 = -\frac{1}{8}$, så $y_p(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}$.

Generell løsning

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}.$$

□

Oppgave 11 .... *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = y^2(1 + 2x)$$

med startbetingelse $y(-1) = 1$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(0)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.5$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(0)$.

Løsning. (a) Euler's metode. Oppgitt $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ og $h = 0.5$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
-1	1	$1^2(1-2) = -1$	$1 + 0.5(-1) = 0.5$
-0.5	0.5	$0.5^2(1-1) = 0$	$0.5 + 0.5(0) = 0.5$
0	0.5		

Fra Euler's metode får vi altså $x_0 = -1$, $x_1 = -0.5$ og $x_2 = 0$ med tilhørende y-verdier $y_0 = 1$, $y_1 = 0.5$ og $y_2 = 0.5$.

Vi får $y(0) \approx y_2 = 0.5$.

(b) Separabel likning. $\frac{dy}{dx} = y^2(1+2x)$ blir til

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 1 + 2x\,dx.$$

Integrerer begge sider og får

$$-\frac{1}{y} = x + x^2 + C.$$

Snur brøkene og får

$$y(x) = \frac{-1}{x + x^2 + C}.$$

For at $y(-1) = 1$ må vi ha

$$y(-1) = \frac{-1}{-1 + (-1)^2 + C} = -\frac{1}{C} = 1$$

så $C = -1$ og

$$y(x) = \frac{-1}{x + x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Det gir

$$y(0) = \frac{1}{1 - 0 - 0} = 1.$$

$\square$