Eksamen 2. desember 2013 **IR102512 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Oppgave 2 .... *(10%)*

(a) Regn ut og skriv på rektangulær form $\dfrac{2-i}{1-3i}$, der $i=\sqrt{-1}$.

(b) La $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & -5 & 2\end{bmatrix}$ og $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Om mulig, regn ut $A-2B$.

Oppgave 3 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= -6\\ x_1 + x_2 \qquad - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Oppgave 4 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = x\cos x$$

(b)

$$g(x) = \ln(1+x^2)$$

Oppgave 5 .... *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspaltning at $\dfrac{5x^2-4x+1}{x^2(x-1)}$ kan skrives

$$\frac{5x^2-4x+1}{x^2(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{5x^2-4x+1}{x^2(x-1)}\,dx$$

Oppgave 6 .... *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int x^2\cos x\,dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\,dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av kalkulator, lærebøker og matematisk formelsamling tillatt. *Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 7 .... *(6%)*

Vi roterer kurven $y = x^2$ om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = 1$. Vis at integralet for arealet av omdreiningslegemet er

$$S_{y=0} = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for arealet. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Oppgave 8 .... *(5%)*

Kurvene $y = 2 - x$ og $y = e^x$ har et skjæringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjæringspunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Oppgave 9 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ er definert for alle $x \neq -2$ og er $1-1$.

Finn et uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Oppgave 10 .... *(12%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$ avgrenser et flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgave 11 .... *(10%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$.

Oppgave 12 .... *(12%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2$$

med startbetingelse $y(1) = 0$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(1.2)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.1$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(1.2)$.

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Oppgåve 2 .... *(10%)*

(a) Rekn ut og skriv på rektangulær form $\dfrac{2-i}{1-3i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(b) La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dersom mogleg, rekn ut $A - 2B$.

Oppgåve 3 .... *(5%)*

Finn alle løysingane til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 \qquad - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Oppgåve 4 .... *(10%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)

$$f(x) = x\cos x$$

(b)

$$g(x) = \ln(1 + x^2)$$

Oppgåve 5 .... *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspalting at $\dfrac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)}$ kan skrivast

$$\frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)}\, dx$$

Oppgåve 6 .... *(10%)*

Finn integrala

(a)

$$\int x^2 \cos x\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 4x^2}\, dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og matematisk formelsamling lovleg. *Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 7 .... *(6%)*

Vi roterer kurven $y = x^2$ om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = 1$. Vis at integralet for arealet av omdreiningslekamen er

$$S_{y=0} = 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for arealet. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Oppgåve 8 .... *(5%)*

Kurvene $y = 2 - x$ og $y = e^x$ har eit skjeringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjeringspunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Oppgåve 9 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ er definert for alle $x \neq -2$ og er $1 - 1$.

Finn eit uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Oppgåve 10 .... *(12%)*

Grafane til funksjonane $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$ avgrensar eit flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgåve 11 .... *(10%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$.

Oppgåve 12 .... *(12%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2$$

med startvilkår $y(1) = 0$.

(a) Finn ein tilnærma verdi for $y(1.2)$ ved Euler's metode med steglengd $h = 0.1$.

(b) Finn løysninga $y(x)$ eksakt og rekn ut $y(1.2)$.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Løsning. Bruker l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{1} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

□

Oppgave 2 .... *(10%)*

(a) Regn ut og skriv på rektangulær form $\dfrac{2-i}{1-3i}$. der $i = \sqrt{-1}$.

(b) La $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Om mulig regn ut $A - 2B$.

Løsning. (a)

$$\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

(b) Størrelsene passer så vi kan legge sammen koordinatvis

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Oppgave 3 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= -6 \\ x_1 + x_2 \qquad - 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Løsning. Setter opp utvida koeffisientmatrise og radreduserer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3-R1]{R2=R2-2R1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[R1=R1-R2]{R3=R3+R2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=-R3]{R1=R1+3R3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

vi har leder 1-ere i kolonnene som tilhører x_1, x_3 og x_4. x_2 er fri variabel. løsning:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - x_2 \\ x_2 = \text{fri} \\ x_3 = -4 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

□

Oppgave 4 . . . . *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = x \cos x$$

(b)

$$g(x) = \ln(1 + x^2)$$

Løsning. (a) Produktregelen:

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

(b) Kjerneregelen med $u = 1 + x^2$ og $u' = 2x$

$$g'(x) = \frac{1}{u} u' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

□

Oppgave 5 . . . . *(10%)*

(a) Vis ved delbrøksoppspaltning at $\dfrac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)}$ kan skrives

$$\frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$$

(b) Finn integralet

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)}\, dx$$

Løsning. (a) Delbrøk har formen

$$\frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x-1) + C(x-1)}{x^2(x-1)}$$

Får likning

$$Ax^2 + Bx^2 - Bx + Cx - C = 5x^2 - 4x + 1$$

Fra x^2-ledd: $A + B = 5$, x-ledd: $-B + C = -4$ og k-ledd: $1 = -C$. Da blir $C = -1$. $B = C + 4 = -1 + 4 = 3$ og $A = 5 - B = 5 - 3 = 2$. Det er presis det vi skulle ha.

(b)

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 1}{x^2(x-1)}\, dx = \int \frac{2}{x-1}\, dx + \int \frac{3}{x}\, dx - \int \frac{1}{x^2}\, dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

□

Oppgave 6 . . . . *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int x^2 \cos x\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + 4x^2}\, dx$$

Løsning. (a) Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$$\begin{array}{cc|c} + & x^2 & \cos x \\ - & 2x & \sin x \\ + & 2 & -\cos x \\ - & 0 & -\sin x \end{array}$$

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

(b) Substitusjon. $u = 1 + 4x^2$ og $du = 8xdx$.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{8}\int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{8}\left[\ln|u|\right]_{u_0}^{u_1} = \frac{1}{8}\Big[\ln(1+4x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{8}(\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{8}\ln 5.$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 7 .... *(6%)*

Vi roterer kurven $y = x^2$ om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = 1$. Vis at integralet for arealet av omdreiningslegemet er

$$S_{y=0} = 2\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

Bruk Simpson's formel til å finne tilnærminga S_4 for arealet. (Dvs. bruk 4 delintervall.)

Løsning. Formelen for rotasjon om x-aksen sier integral over 2π ganger radius ganger lengde:

$$S_{y=0} = \int_a^b 2\pi y\, ds$$

Vi har $y = x^2$ og $y' = 2x$ så $ds = \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \sqrt{1+4x^2}\, dx$ så

$$S_{y=0} = \int_0^1 2\pi x^2\sqrt{1+4x^2}\, dx.$$

Deler intervallet $[0, 1]$ i 4 biter så $h = 1/4$. Simpson's formel gir (setter felles faktor 2π utenfor)

$$\begin{aligned} S_4 = 2\pi\frac{1/4}{3}\Big(&0^2\sqrt{1+4\cdot 0^2} + 4\cdot(1/4)^2\sqrt{1+4\cdot(1/4)^2} + 2\cdot(2/4)^2\sqrt{1+4\cdot(2/4)^2} \\ &+4\cdot(3/4)^2\sqrt{1+4\cdot(3/4)^2} + 1^2\sqrt{1+4\cdot 1^2}\Big) \\ &= \frac{\pi}{6}\left(0 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{9}{4}\sqrt{\frac{13}{4}} + \sqrt{5}\right) \approx 0.52360 \cdot 7.2789 \approx 3.8112. \end{aligned}$$

□

Oppgave 8 .... *(5%)*

Kurvene $y = 2 - x$ og $y = e^x$ har et skjæringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjæringspunktet ved Newton's metode i tre steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Løsning. Sett $f(x) = e^x - (2-x) = e^x + x - 2$ slik at $f'(x) = e^x + 1$. Skjæringspunktet er nullpunkt til $f(x)$.

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{e^{0.5} + 0.5 - 2}{e^{0.5} + 1} \approx 0.5 - \frac{0.14872}{2.6487} \approx 0.44385 \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.44385 - \frac{0.0025509}{2.5587} \approx 0.44285 \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.44285
\end{aligned}$$

□

Oppgave 9 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ er definert for alle $x \neq -2$ og er $1-1$.

Finn et uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Løsning. Setter $x = f(y) = \frac{y-3}{y+2}$. Løser mhp y.

$$x(y+2) = y-3 \Leftrightarrow xy+2x = y-3 \Leftrightarrow xy-y = -2x-3 \Leftrightarrow (x-1)y = -(2x+3) \Leftrightarrow y = -\frac{2x+3}{x-1}$$

Vi har funnet at $f^{-1}(x) = -\dfrac{2x+3}{x-1}$. □

Oppgave 10 .... *(12%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$ avgrenser et flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Løsning. (a) Finner skjæringspunkt: $x^2 = 2 - x$ eller $x^2 + x - 2 = 0$. *abc*-formelen gir $x = -2$ og $x = 1$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-2}^{1} 2 - x - x^2\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} \\
&= (2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} + 4 + 2 = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Finner moment om $x = 0$:

$$\begin{aligned}
M_{x=0} &= \int_{-2}^{1} x(2 - x - x^2)\, dx = \int_{-2}^{1} 2x - x^2 - x^3\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{1} \\
&= (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - (4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{4}) = 1 - 3 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Da får vi (fra (a) er $m = A = 9/2$)

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{-9/4}{9/2} = -\frac{1}{2}$$

x-koordinaten til tyngdepunktet er $-1/2$. □

Oppgave 11 .... *(10%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = e^{-x}$.

Løsning. (a) Homogen andre ordens diff.likn. Kar.likn. $r^2 - 2r + 5 = 0$. abc-formel:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Tilfelle III. Løsning: $y(x) = Ae^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x)$.

(b) Ikke-homogen likning. Kar.likn. $r^2 + 2r - 3 = 0$. abc-formelen gir $r = -3$ og $r = 1$. Homogen løsning $y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^x$. Høyreside $f(x) = e^{-x}$. Gjetter $y_p(x) = Ce^{-x}$ så $y_p'(x) = -Ce^{-x}$ og $y_p''(x) = Ce^{-x}$. Setter inn

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = e^{-x}(C - 2C - 3C) = -4Ce^{-x} = e^{-x}$$

Ser at $C = -\frac{1}{4}$. Løsning

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^x - \frac{1}{4}e^{-x}.$$

□

Oppgave 12 .... *(12%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2$$

med startbetingelse $y(1) = 0$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(1.2)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.1$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(1.2)$.

Løsning. (a) Euler's metode. Oppgitt $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $f(x, y) = 2y/x + x^2$ og $h = 0.1$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
1	0	$0 + 1^2 = 1$	$0 + 0.1(1) = 0.1$
1.1	0.1	$\frac{0.2}{1.1} + 1.1^2 \approx 1.3918$	$0.1 + 0.1(1.3918) = 0.23918$
1.2	0.23918		

Vi får $y(1.2) \approx y_2 = 0.23918$.

(b) Lineær likning. $y' - \frac{2}{x}y = x^2$. Integrerende faktor

$$e^{\int -2/x dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Løsning blir

$$y(x) = \frac{1}{x^{-2}} \int x^{-2}x^2 \, dx = x^2 \int 1 \, dx = x^2(x + C) = x^3 + Cx^2.$$

For at $y(1) = 0$ må vi ha

$$y(1) = 1^3 + C1^2 = 1 + C = 0$$

så $C = -1$ slik at $y(x) = x^3 - x^2$. Det gir

$$y(1.2) = 1.2^3 - 1.2^2 = 0.288.$$

□