EKSAMEN
BOKMÅL

HØGSKOLEN I ÅLESUND

DATO:	TID:	OPPG. SIDER:	VEDLEGG:
3 desember 2015	9:00-13:00	2	0

FAGKODE:	FAGNAVN:
IR102512	Matematikk 1

HJELPEMIDLER:

Del 1: kl 09.00-11.00
- Ingen

Del 2: kl 11.00-13.00
- Lommeregner
- Lærebok etter fritt valg
- Matematisk formelsamling

ER DET TILLATT MED NOTATER I HJELPEMIDLER? ☒ JA ☐ NEI

NOTATER I SPRÅKORDBØKER ER IKKE TILLATT

VIKTIG:

START PÅ NY SIDE FOR HVER OPPGAVE!

BESVARELSEN **MÅ** SKRIVES MED BLÅ ELLER SVART KULEPENN!

STUDENTEN MÅ SELV KONTROLLERE AT ANTALL SIDER/VEDLEGG STEMMER.

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(10%)*

(a) Løs $z^2 + 2iz + 3 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(b) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Om mulig, regn ut AB og BA.

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$$

Oppgave 3 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet ved Gausseliminasjon.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 4 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(5x)$$

Oppgave 5 .... *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx$$

(b)

$$\int (x+2)e^{-x}\, dx$$

Oppgave 6 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$ er definert for alle $x \neq \frac{1}{2}$ og er en-til-en.

Finn et uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Oppgave 7 .... *(5%)*

Fullfør kvadratet og finn integralet

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+5}\, dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av kalkulator, lærebøker og matematisk formelsamling tillatt. *Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 8 .... *(5%)*

Kurvene $y = x$ og $y = e^{-x^2}$ har et skjæringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjæringspunktet ved Newtons metode i to steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Oppgave 9 .... *(5%)*

Sett opp integralet for *lengden* s av kurven $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Bruk Simpsons metode til å finne tilnærmingen S_4 til lengden s.

Oppgave 10 .... *(15%)*

Funksjonene $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ og $g(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, avgrenser et flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn koordinatene til tyngdepunktet i flatestykket F.

(c) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

Oppgave 11 .... *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$.

(c) $y' = k(y - 20)$, der $y(0) = 80$, $y(5) = 50$, og k er en konstant.

Oppgave 12 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

med startbetingelse $y(0) = 0$.

Finn en tilnærmet verdi for $y(1.0)$ ved *Eulers Metode* med steglengde $h = 0.5$.

Oppgave 13 .... *(5%)*

En parametrisk kurve er gitt ved $x = \sin(2t)$ og $y = \cos(2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Finn overflatearealet av det romlegemet som framkommer når kurven roterer en gang om y-aksen.

EKSAMEN
NYNORSK

HØGSKOLEN I ÅLESUND

DATO:		TID:	OPPG. SIDER:	VEDLEGG:
3 desember 2015		9:00-13:00	2	0
FAGKODE: IR102512	FAGNAMN: Matematikk 1			

HJELPEMIDDEL:

Del 1: kl 09.00-11.00
- Ingen

Del 2: kl 11.00-13.00
- Lommereknar
- Lærebok etter fritt val
- Matematisk formelsamling

ER DET TILLATT MED NOTAT I HJELPEMIDDEL? ☒ JA ☐ NEI

NOTAT I SPRÅKORDBØKER ER IKKJE TILLATT

VIKTIG:

START PÅ NY SIDE FOR KVAR OPPGÅVE!

OPPGÅVESVARET **MÅ** SKRIVAST MED BLÅ ELLER SVART KULEPENN!

STUDENTEN MÅ SJØLV KONTROLLERE AT TALET PÅ SIDER/VEDLEGG STEMMER.

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 .... *(10%)*

(a) Løys $z^2 + 2iz + 3 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(b) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Dersom mogleg, rekn ut AB og BA.

Oppgåve 2 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$$

Oppgåve 3 .... *(5%)*

Finn alle løysingane til likningssystemet ved Gausseliminasjon.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Oppgåve 4 .... *(10%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(5x)$$

Oppgåve 5 .... *(10%)*

Finn integrala

(a)

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx$$

(b)

$$\int (x+2)e^{-x}\, dx$$

Oppgåve 6 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$ er definert for alle $x \neq \frac{1}{2}$ og er ein-til-ein.

Finn eit uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Oppgåve 7 .... *(5%)*

Fullfør kvadratet og finn integralet

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+5}\, dx$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og matematisk formelsamling lovleg. *Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 8 .... *(5%)*

Kurvene $y = x$ og $y = e^{-x^2}$ har eit skjeringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjeringspunktet ved Newtons metode i to steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Oppgåve 9 .... *(5%)*

Sett opp integralet for *lengda* s av kurva $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

Bruk Simpsons metode til å finne tilnærminga S_4 til lengda s.

Oppgåve 10 .... *(15%)*

Funksjonane $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ og $g(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, avgrensar eit flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn koordinatene til tyngdepunktet i flatestykket F.

(c) Finn volumet av den romlekamen som blir danna når flatestykket F blir dreidd ein gong om y-aksen.

Oppgåve 11 .... *(15%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$.

(c) $y' = k(y - 20)$, der $y(0) = 80$, $y(5) = 50$, og k er en konstant.

Oppgåve 12 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

med startvilkår $y(0) = 0$.

Finn ein tilnærma verdi for $y(1.0)$ ved *Eulers Metode* med steglengd $h = 0.5$.

Oppgåve 13 .... *(5%)*

Ei parametrisk kurve er gitt ved $x = \sin(2t)$ og $y = \cos(2t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Finn overflatearealet av den romlekamen som blir danna når kurva blir dreidd ein gong om y-aksen.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(10%)*

(a) Løs $z^2 + 2iz + 3 = 0$ der $i = \sqrt{-1}$.

(b) La $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Om mulig, regn ut AB og BA.

Løsning. (a) Bruker abc-formelen

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{-2i \pm 4i}{2} = -i \pm 2i = \begin{cases} i \\ -3i \end{cases}$$

(b) A er 2×3 og B er 2×2 så AB gir ikke mening, men BA er 2×3 matrise:

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 12 & 2 \end{bmatrix}.$$

□

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2 - 4}$$

Løsning. Må bruke l'Hôpital (siden $\ln(4-3) = \ln(1) = 0$ og $2^2 - 4 = 0$)

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \overset{H}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2}{2x-3}}{2x} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x(2x-3)} = \frac{1}{2(4-3)} = \frac{1}{2}.$$

□

Oppgave 3 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Løsning. Setter opp matrise og bruker Gauss-eliminasjon (radreduksjon).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 8 & -9 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R3=R3+R1]{R2=R2-4R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R2=R2-3R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Vi har leder 1-ere i kolonnene som tilhører x_1, x_2 og x_3. Entydlig løsning:

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_2 = 7 + 4x_3 = 7 - 8 = -1 \\ x_1 = -4 + x_2 - 3x_3 = -4 - 1 + 6 = 1. \end{cases}$$

□

Oppgave 4 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

(b)

$$g(x) = \sin^2(5x)$$

Løsning. (a) Kvotientregelen

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

(b) Kjerneregel

$$g'(x) = 2\sin(5x) \cdot \cos(5x) \cdot 5 = 10\sin(5x)\cos(5x).$$

Dette kan forenkles til $g'(x) = 5\sin(10x)$ ved dobbeltvinkelformel for sinus. □

Oppgave 5 .... *(10%)*

Finn integralene

(a)

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\; dx$$

(b)

$$\int (x+2)e^{-x}\; dx$$

Løsning. (a). Bruker substitusjonen $u = 1 + x$ og $du = dx$.

$$\int_0^3 \sqrt{1+x}\; dx = \int_{x=0}^{x=3} u^{1/2}\; du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{2}{3}\left[(1+x)^{3/2}\right]_0^3$$
$$= \frac{2}{3}\left((4)^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

(b). Delvis integrasjon. Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$+$	$x+2$	e^{-x}
$-$	1	$-e^{-x}$
$+$	0	e^{-x}

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\int (x+2)e^{-x}\; dx = -(x+2)e^{-x} - e^{-x} + C = -xe^{-x} - 3e^{-x} + C.$$

□

Oppgave 6 .... *(5%)*

Funksjonen $f(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$ er definert for alle $x \neq \frac{1}{2}$ og er en-til-en.

Finn et uttrykk for den inverse funksjonen $f^{-1}(x)$.

Løsning. Vi setter $x = f(y)$ og løser med hensyn på y.

$$x = \frac{1-y}{2y-1} \Rightarrow x(2y-1) = 1-y \Rightarrow 2xy + y = 1+x \Rightarrow (2x+1)y = 1+x \Rightarrow y = \frac{1+x}{2x+1}.$$

Dette sier at inversen til $f(x)$ er $f^{-1}(x) = \dfrac{1+x}{2x+1}$. □

Oppgave 7 .... (5%)

Fullfør kvadratet og finn integralet

$$\int \frac{x+5}{x^2+4x+5}\, dx$$

Løsning. Vi har $x^2+4x+5 = (x+2)^2 + noe$. Ganger ut $(x+2)^2 + noe = x^2+4x+4+noe$. For at dette skal balansere må $noe = 1$. Bruker substitusjonen $u = x+2$, $du = dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{x^2+4x+5}\, dx &= \int \frac{(x+2)+3}{(x+2)^2+1}\, dx = \int \frac{u+3}{u^2+1}\, du = \int \frac{u}{u^2+1}\, du + 3\int \frac{1}{u^2+1}\, du \\ &= \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + 3\arctan(u) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + 3\arctan(x+2) + C.\end{aligned}$$

I det første av de to integralene brukte vi substitusjonen $v = u^2+1$ så $dv = 2udu$ og $\frac{1}{2}dv = udu$:

$$\int \frac{u}{u^2+1}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = \frac{1}{2}\ln|v| + C = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 8 .... (5%)

Kurvene $y = x$ og $y = e^{-x^2}$ har et skjæringspunkt mellom 0 og 1.

Finn skjæringspunktet ved Newtons metode i to steg. Sett $x_0 = 0.5$.

Løsning. Lett $f(x) = x - e^{-x^2}$. Skal finne nullpunkt til $f(x)$. Har $f'(x) = 1 + 2xe^{-x^2}$. Newtons formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n^2}}{1 + 2x_n e^{-x_n^2}}.$$

Starter med $x_0 = 0.5$ og finner

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.5 - e^{-0.5^2}}{1 + 2\cdot 0.5 e^{-0.5^2}} \approx 0.65674$$

og

$$x_2 = 0.65674 - \frac{0.65674 - e^{-0.65674^2}}{1 + 2\cdot 0.65674 e^{-0.65674^2}} \approx 0.65292.$$

Nullpunktet er omtrent 0.65292. □

Oppgave 9 .... (5%)

Sett opp integralet for *lengden* s av kurven $f(x) = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$.

Bruk Simpsons metode til å finne tilnærmingen S_4 til lengden s.

Løsning. Bruker $ds = \sqrt{1+f'(x)^2}dx$. Siden $f'(x) = -2x$ blir $ds = \sqrt{1+4x^2}dx$. Lengden av kurven

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx.$$

Intervallet $[0,1]$ delt i fire biter gir punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ og $x_4 = 1$. Lager tabell over tilhørende y-verdier når $y = \sqrt{1+4x^2}$

x_n	0	0.25	0.5	0.75	1.0
y_n	1	1.11803	1.41421	1.80278	2.23607

Simpsons metode gir

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx \\ &\approx S_4 = \frac{0.25}{3}(1.0 + 4\cdot 1.11803 + 2\cdot 1.41421 + 4\cdot 1.80278 + 2.23607) \approx 1.47898. \end{aligned}$$

(Utregning av eksakt svar bruker trigonometrisk substitusjon og gir omtrent 1.47894 . . . som verdi for lengden.) □

Oppgave 10 . . . . *(15%)*

Funksjonene $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ og $g(x) = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, avgrenser et flatestykke F.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn koordinatene til tyngdepunktet i flatestykket F.

(c) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

Løsning. (a) Arealet er gitt ved

$$A = \int_0^1 (2-\sqrt{x}) - \sqrt{x}\,dx = \left[2x - \frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

(b) Regner med tetthet 1 så $m = A = 2/3$ fra (a). Regner moment:

$$M_{x=0} = \int_0^1 x(2-\sqrt{x}-\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 2x - 2x^{3/2}\,dx = \left[x^2 - \frac{4}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

og

$$\begin{aligned} M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2-\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 4 - 4\sqrt{x} + x - x\,dx = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Det gir tyngdepunkt

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_{x=0}}{m}, \frac{M_{y=0}}{m}\right) = \left(\frac{1/5}{2/3}, \frac{2/3}{2/3}\right) = (\frac{3}{10}, 1).$$

(c). Bruker sammenhengen mellom volum og moment:

$$V_{x=0} = 2\pi\bar{x}m = 2\pi\frac{3}{10}\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{5}.$$

□

Oppgave 11 .... *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$.

(c) $y' = k(y - 20)$, der $y(0) = 80$, $y(5) = 50$, og k er en konstant.

Løsning. (a). Andre orden lineær diff.likn. Karakteristisk likning $r^2 + 4r + 5 = 0$ som har løsninger

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i.$$

I oppsettet i boka er $k = -2$ og $\omega = 1$. Tilfelle III løsning

$$y(x) = Ae^{-2x}\cos(x) + Be^{-2x}\sin(x).$$

(b). Andre orden lineær diff.likn. som er inhomogen. Karakteristisk likning $r^2 + 2r - 3 = 0$ som fra abc-formelen har løsninger $r_1 = -3$ og $r_2 = 1$. Homogen løsninga av likninga er

$$y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^x.$$

Høyre side i likning er $f(x) = 4e^x$. Gjetter $y_p(x) = Ce^x$. Men dette er del av homogen løsning, så vi må modifisere ved å gange med x.

Altså $y_p(x) = Cxe^x$. Det gir $y_p'(x) = Ce^x + Cxe^x$ og $y_p''(x) = 2Ce^x + Cxe^x$. Setter inn i likning

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = 2Ce^x + Cxe^x + 2(Ce^x + Cxe^x) - 3Cxe^x = 4Ce^x = f(x) = 4e^x.$$

Vi må ha $C = 1$ så $y_p(x) = xe^x$.

Tilsammen gir dette løsningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^x + xe^x.$$

(c). Skriver vi likninga som

$$y' - ky = -20k$$

så ser vi at det er ei lineær første ordens likning. $p(t) = -k$ så $F(t) = e^{\int -k dt} = e^{-kt}$. $q(t) = -20k$. Løsning

$$y(t) = \frac{1}{F(t)}\int F(t)q(t)\,dt = e^{kt}\int -20ke^{-kt}\,dt = e^{kt}\left(20e^{-kt} + C\right) = 20 + Ce^{kt}.$$

Må finne k og C.

$$80 = y(0) = 20 + Ce^0 = 20 + C,$$

så $C = 80 - 20 = 60$. Vi kan nå finne k:

$$50 = y(5) = 20 + 60e^{5k}$$

noe som gir at $60e^{5k} = 50 - 20 = 30$. Da er $e^{5k} = 1/2$ og

$$5k = \ln(e^{5k}) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$$

så $k = -\frac{\ln 2}{5}$. Løsningen er altså

$$y(t) = 20 + 60e^{-t\ln(2)/5}.$$

(Dette kan forresten skrives som $y(t) = 20 + 60 \cdot 2^{-t/5}$ siden $-t\ln(2)/5 = \ln(2^{-t/5})$). $\square$

Oppgave 12 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

med startbetingelse $y(0) = 0$.

Finn en tilnærmet verdi for $y(1.0)$ ved *Eulers Metode* med steglengde $h = 0.5$.

Løsning. Euler's metode. Oppgitt $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $f(x, y) = 1 - y^2$ og $h = 0.5$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
0	0	$1 - 0^2 = 1$	$0 + 0.5(1) = 0.5$
0.5	0.5	$1 - 0.5^2 = 0.75$	$0.5 + 0.5(0.75) = 0.875$
1.0	0.875		

Vi får $y(1.0) \approx 0.875$. □

Oppgave 13 .... *(5%)*

En parametrisk kurve er gitt ved $x = \sin(2t)$ og $y = \cos(2t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Finn overflatearealet av det romlegemet som framkommer når kurven roterer en gang om y-aksen.

Løsning. Skal bruke formelen $S_{x=0} = \int 2\pi x ds$. Her er $x = \sin(2t)$. Må finne ds. Når $x = \sin(2t)$ er $dx/dt = 2\cos(2t)$ og når $y = \cos(2t)$ er $dy/dt = -2\sin(2t)$. Det gir

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (2\cos(2t))^2 + (-2\sin(2t))^2 = 4(\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) = 4$$

slik at

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{4} dt = 2dt.$$

Finner areal:

$$\begin{aligned} S_{x=0} &= \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin(2t)\; 2dt = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\; dt = 4\pi \left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/2} \\ &= 4\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1\right) = 4\pi. \end{aligned}$$

□