Eksamen 8. desember 2016 **IR102512 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(10%)*

(a) Regn ut $\dfrac{5+i}{3-2i}$, der $i=\sqrt{-1}$.

(b) Regn ut AB og BA, og finn A^{-1} når $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ og $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet ved Gausseliminasjon.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1\\ x_2 - 3x_3 &= 4\\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Oppgave 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = x^2\cos(x)$$

(b)

$$g(x) = \ln(\sqrt{5x^2-4})$$

Oppgave 4 .... *(20%)*

Finn integralene

(a)

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$

(b)

$$\int \frac{x+2}{(x+4)^2}\,dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx$$

(d)

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx$$

Oppgave 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(1-x^2)}{x^2-2x+1}$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og matematisk formelsamling tillatt. *Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger skal føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 6 .... *(10%)*

Funksjonene $y = x^3(2-x)$ og $y = 0$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgave 7 .... *(5%)*

En kurve er gitt ved $x = y^2 - x^2y - 1$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Oppgave 8 .... *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$.

(c) $y' + xy = x$, der $y(0) = 2$.

Oppgave 9 .... *(5%)*

Finn $P_2(x)$, Taylorpolynomet av grad 2, for $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_2(x)$ til å finne en tilnærma verdi av $f(0.5)$.

Hvilken verdi gir kalkulatoren din for $f(0.5)$?

Oppgave 10 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} - 1$$

med startbetingelse $y(0) = 1$.

Finn en tilnærmet verdi for $y(0.2)$ ved *Eulers Metode* med steglengde $h = 0.1$.

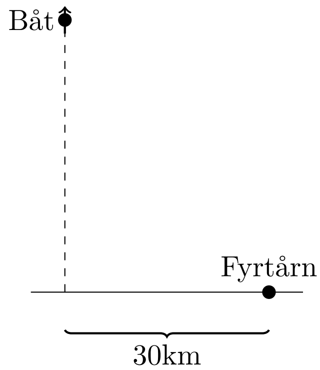
Oppgave 11 .... *(5%)*

Sett opp integralet for *lengden* s av kurven $y = \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$.

Bruk Trapesmetoden til å finne tilnærmingen T_4 til lengden s.

Oppgave 12 .... *(5%)*

En båt kjører ut fra kysten i retning rett mot nord. Det står et fyrtårn 30km øst for punktet på kysten hvor båten la ut ifra. På et tidspunkt observeres det med radar fra fyrtårnet at båten er nøyaktig 50km fra fyrtårnet og at avstanden mellom båten og fyrtårnet øker med 3 meter per sekund. Hvor fort kjører båten på dette tidspunktet? Gi svaret i km per time.



Eksamen 8. desember 2016 **IR102512 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timar *Nynorsk*

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan berre bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 .... *(10%)*

(a) Regn ut $\dfrac{5+i}{3-2i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(b) Rekn ut AB og BA, og finn A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Oppgåve 2 .... *(5%)*

Finn alle løysingane til likningssystemet ved Gausseliminasjon.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Oppgåve 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)

$$f(x) = x^2 \cos(x)$$

(b)

$$g(x) = \ln(\sqrt{5x^2 - 4})$$

Oppgåve 4 .... *(20%)*

Finn integrala

(a)

$$\int \frac{x-7}{x^2 + x - 6}\, dx$$

(b)

$$\int \frac{x+2}{(x+4)^2}\, dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx$$

(d)

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx$$

Oppgåve 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \cos(1 - x^2)}{x^2 - 2x + 1}$$

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og matematisk formelsamling lovleg. *Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 6 .... *(10%)*

Funksjonane $y = x^3(2 - x)$ og $y = 0$ avgrensar eit flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgåve 7 .... *(5%)*

Ei kurve er gitt ved $x = y^2 - x^2y - 1$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne eit uttrykk for y'.

Oppgåve 8 .... *(15%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$.

(c) $y' + xy = x$, der $y(0) = 2$.

Oppgåve 9 .... *(5%)*

Finn $P_2(x)$, Taylorpolynomet av grad 2, for $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_2(x)$ til å finne ein tilnærma verdi av $f(0.5)$.

Kva for verdi gir kalkulatoren din for $f(0.5)$?

Oppgåve 10 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} - 1$$

med startvilkår $y(0) = 1$.

Finn ein tilnærma verdi for $y(0.2)$ ved *Eulers Metode* med steglengd $h = 0.1$.

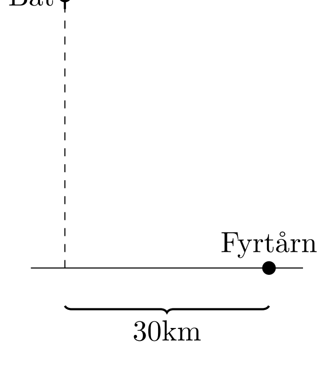
Oppgåve 11 .... *(5%)*

Sett opp integralet for *lengda* s av kurva $y = \sin(x)$, $0 \le x \le \pi$.

Bruk Trapesmetoden til å finne tilnærminga T_4 til lengda s.

Oppgåve 12 .... *(5%)*

Ein båt køyrer ut frå kysten rett nordover. Det står eit fyrtårn 30km aust om punktet på kysten der båten la ut ifrå. På eit tidspunkt observerast det med radar frå fyrtårnet at båten er nøyaktig 50km frå fyrtårnet og at avstanden mellom båten og fyrtårnet aukar med 3 meter per sekund. Kor fort køyrer båten på dette tidspunktet? Gje svaret i km per time.



Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(10%)*

(a) Regn ut $\frac{5+i}{3-2i}$, der $i = \sqrt{-1}$.

(b) Regn ut AB og BA, og finn A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Løsning. (a) Regner

$$\frac{5+i}{3-2i} = \frac{(5+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{15+2i^2+3i+10i}{9-4i^2} = \frac{15-2+13i}{9+4} = \frac{13+13i}{13} = 1+i.$$

(b) Regner

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 & -6+6 \\ -2+2 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

og

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 2-2 \\ 6-6 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Utregninga over betyr at

$$A^{-1} = \frac{1}{7}B = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

□

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn alle løsningene til likningssystemet ved Gausseliminasjon.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_2 - 3x_3 &= 4 \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Løsning. Setter opp matrise og bruker Gauss-eliminasjon (radreduksjon).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3=R3+2R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R3=R3-R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Fra dette kan vi lese av at $x_3 = -1$, $x_2 = 4 + 3x_3 = 4 - 3 = 1$, og $x_1 = 1 + x_2 - x_3 = 1 + 1 - (-1) = 3$. Altså $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ og $x_3 = -1$ er den eneste løsningen. □

Oppgave 3 .... *(10%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = x^2 \cos(x)$$

(b)

$$g(x) = \ln(\sqrt{5x^2 - 4})$$

Løsning. (a) Produktregelen:

$$f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x).$$

(b) Skriver først om

$$g(x) = \ln(\sqrt{5x^2-4}) = \frac{1}{2}\ln(5x^2-4).$$

Bruker så kjerneregelen:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5x^2-4}\cdot 10x = \frac{5x}{5x^2-4}.$$

Alternativt: Hvis vi ikke skriver om blir det bare litt mer kronglete utregning:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{5x^2-4}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5x^2-4}}\cdot 10x = \frac{5x}{5x^2-4}.$$

□

Oppgave 4 .... *(20%)*

Finn integralene

(a)

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$

(b)

$$\int \frac{x+2}{(x+4)^2}\,dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx$$

(d)

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx$$

Løsning. (a). Delbrøk. abc-formelen gir at $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ så

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

Likning $x-7 = Ax+3A+Bx-2B$. x-ledd: $1 = A+B$ og k-ledd: $-7 = 3A-2B$. Legger to ganger første likning til den andre og får $-7+2 = 3A+2A+2B-2B$, altså $-5 = 5A$ så $A=-1$. Det gir $B = 1-A = 2$. Integrerer

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x+3}\,dx = -\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C.$$

(b). Her kan vi bruke delbrøk eller rett og slett substituere $u = x+4$ slik at $du = dx$ og $x+2 = x+4-2 = u-2$:

$$\int \frac{x+2}{(x+4)^2}\,dx = \int \frac{u-2}{u^2}\,du = \int \frac{1}{u}-\frac{2}{u^2}\,du = \ln|u| + \frac{2}{u} + C = \ln|x+4| + \frac{2}{x+4} + C.$$

(c). Delvis integrasjon. Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$$\begin{array}{cc|c} + & x^2 & \sin(x) \\ - & 2x & -\cos(x) \\ + & 2 & -\sin(x) \\ - & 0 & \cos(x) \end{array}$$

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^2 \sin(x)\, dx &= \Big[-x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)\Big]_0^\pi \\ &= -\pi^2\cos(\pi) + 2\pi\sin(\pi) + 2\cos(\pi) + 0^2\cos(0) - 2\cdot 0\sin(0) - 2\cos(0) = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

siden $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$ og $\cos(0) = 1$.

(d). Det enkleste er kanskje substitusjon $u = 1 + x$ slik at $du = dx$ og $x = u - 1$:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x}\, dx &= \int (u-1)u^{1/2}\, du = \int u^{3/2} - u^{1/2}\, du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C \end{aligned}$$

Alternativt: Delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sqrt{1+x}$:

$$\begin{array}{cc|c} + & x & (1+x)^{1/2} \\ - & 1 & \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \\ + & 0 & \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} \end{array}$$

som gir

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C.$$

som faktisk er samme svar selv om det ikke er helt åpenbart. □

Oppgave 5 .... *(5%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(1-x^2)}{x^2-2x+1}$$

Løsning. Siden $\cos(1-1^2) = 1$ og $\sin(1-1^2) = 0$ kan vi bruke l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(1-x^2)}{x^2-2x+1} &= \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-2x\sin(1-x^2)}{2x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] \\ &\overset{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\cos(1-x^2)(-2x)^2 - 2\sin(1-x^2)}{2} = \frac{1(-2)^2 - 0}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 6 .... *(10%)*

Funksjonene $y = x^3(2-x)$ og $y = 0$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn x-koordinaten til tyngdepunktet i flatestykket F.

Løsning. (a). Grafene krysser hverandre når $x = 0$ og når $x = 2$. Regner areal

$$A = \int_0^2 x^3(2-x)\,dx = \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2^5\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}.$$

(b). Trenger moment:

$$M_{x=0} = \int_0^2 x(x^3(2-x))\,dx = \int_0^2 2x^4 - x^5\,dx = \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^2 = 2^6\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}.$$

Fra (a) har vi $m = A = 8/5$. Dette gir

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{32/15}{8/5} = \frac{4}{3}.$$

□

Oppgave 7 . . . . *(5%)*

En kurve er gitt ved $x = y^2 - x^2y - 1$.

Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

Løsning. Deriverer begge sider med hensyn på x:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(y^2 - x^2y - 1)$$

som gir

$$1 = 2yy' - 2xy - x^2y' + 0.$$

Da blir $(2y - x^2)y' = 1 + 2xy$ slik at

$$y' = \frac{1 + 2xy}{2y - x^2}.$$

□

Oppgave 8 . . . . *(15%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

(b) $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$.

(c) $y' + xy = x$, der $y(0) = 2$.

Løsning. (a). Andre orden lineær diff.likn. Karakteristisk likning $r^2 - 4r + 5 = 0$ som har løsninger

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Tilfelle III løsning ($k = 2$ og $\omega = 1$)

$$y(x) = Ae^{2x}\sin(x) + Be^{2x}\cos(x).$$

(b). Andre orden lineær diff.likn. som er inhomogen. Karakteristisk likning $r^2 - 2r - 3 = 0$ som fra abc-formelen har løsninger

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

Homogen løsninga av likninga er Tilfelle I løsning

$$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$$

Høyre side i likning er $f(x) = e^{2x}$. Gjetter $y_p(x) = Ce^{2x}$. Det gir $y_p'(x) = 2Ce^{2x}$ og $y_p''(x) = 4Ce^{2x}$. Setter inn i likning

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 4Ce^{2x} - 2 \cdot 2Cxe^{2x} - 3 \cdot Ce^{2x} = -3Ce^{2x} = f(x) = e^{2x}.$$

Vi må ha $C = -1/3$ så $y_p(x) = -\frac{1}{3}e^{2x}$.

Tilsammen gir dette løsningen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{3}e^{2x}.$$

(c). Lineær likning med $p(x) = x$ og $q(x) = x$. Det gir integrerende faktor

$$F(x) = e^{\int x dx} = e^{x^2/2}.$$

Løsning blir

$$y(x) = \frac{1}{e^{x^2/2}} \int xe^{x^2/2}\, dx = e^{-x^2/2} \int xe^{x^2/2}\, dx$$

Integralet her løser vi med substitusjonen $u = x^2/2$ så $du = xdx$:

$$\int xe^{x^2/2}\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{x^2/2} + C$$

som satt inn i $y(x)$ gir

$$y(x) = e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} + C) = 1 + Ce^{-x^2/2}.$$

Skulle ha $y(0) = 1 + Ce^0 = 1 + C = 2$ så $C = 1$. Løsning:

$$y(x) = 1 + e^{-x^2/2}.$$

□

Oppgave 9 .... *(5%)*

Finn $P_2(x)$, Taylorpolynomet av grad 2, for $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ med senter i $a = 0$.

Bruk $P_2(x)$ til å finne en tilnærma verdi av $f(0.5)$.

Hvilken verdi gir kalkulatoren din for $f(0.5)$?

Løsning. Deriverer

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad f''(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Setter inn $a = x = 0$ (og bruker $e^0 = 1$):

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1.$$

Dette kan vi nå plugge inn i formelen for $P_2(x)$:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

Kan nå finne

$$f(0.5) \approx P_2(0.5) = 1 + \frac{1}{2}(0.5)^2 = 1.125.$$

Kalkulatoren gir $f(0.5) = \cosh(0.5) \approx 1.1276$. □

Oppgave 10 .... *(5%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} - 1$$

med startbetingelse $y(0) = 1$.

Finn en tilnærmet verdi for $y(0.2)$ ved *Eulers Metode* med steglengde $h = 0.1$.

Løsning. Euler's metode. Oppgitt $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x, y) = e^{-y} - 1$ og $h = 0.1$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
0	1	$e^{-1} - 1 \approx -0.632$	$1 + 0.1(-0.632) = 0.9368$
0.1	0.9368	$e^{-0.9368} - 1 \approx -0.608$	$0.9368 + 0.1(-0.608) = 0.876$
0.2	0.876		

Vi får $y(0.2) \approx 0.876$. □

Oppgave 11 .... *(5%)*

Sett opp integralet for *lengden* s av kurven $y = \sin(x)$, $0 \le x \le \pi$.

Bruk Trapesmetoden til å finne tilnærmingen T_4 til lengden s.

Løsning. Bruker $ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ med $y' = \cos(x)$ gir det

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)}\, dx.$$

Intervallet $[0, \pi]$ delt i fire biter gir punktene $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/2$, $x_3 = 3\pi/4$ og $x_4 = \pi$. Lager tabell over tilhørende y-verdier for $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$.

x_n	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
y_n	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3/2}$	1	$\sqrt{3/2}$	$\sqrt{2}$

Eller med tilnærma verdier avrunda til tre tellende siffer:

x_n	0	0.785	1.57	2.36	3.14
y_n	1.41	1.22	1.00	1.22	1.41

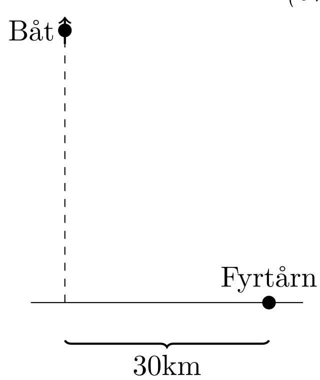
Trapesmetoden med $h = (\pi - 0)/4 \approx 0.785$ gir

$$\begin{aligned} T_4 &= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{1}{2}y_4\right) \\ &\approx 0.785\,(0.5 \cdot 1.41 + 1.22 + 1.00 + 1.22 + 0.5 \cdot 1.41) = 0.785\,(1.41 + 2.44 + 1.00) \approx 3.81. \end{aligned}$$

Eksaktverdiene over gir $T_4 = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{3/2}\right) \approx 3.82$. PC-en sier at $s = 3.82019\ldots$ □

Oppgave 12 .... *(5%)*

En båt kjører ut fra kysten i retning rett mot nord. Det står et fyrtårn 30km øst for punktet på kysten hvor båten la ut ifra. På et tidspunkt observeres det med radar fra fyrtårnet at båten er nøyaktig 50km fra fyrtårnet og at avstanden mellom båten og fyrtårnet øker med 3 meter per sekund. Hvor fort kjører båten på dette tidspunktet? Gi svaret i km per time.



Løsning. La x være avstanden fra kysten til båten (den prikka linja i tegningen). La L være avstanden fra fyrtårnet til båten. Pytagoras sier at $x^2 + 30^2 = L^2$. Det er oppgitt av $\frac{dL}{dt} = 3$ m/s i det $L = 50$ km. Vi er bedt om å finne $\frac{dx}{dt}$ (båten går rett nordover).
Endring av enheten fra m/s til km/t er:

$$\frac{m}{s} = \frac{\frac{km}{1000}}{\frac{t}{3600}} = 3.6\frac{km}{t}.$$

Hvis vi deriverer begge sider av $x^2 + 30^2 = L^2$ med hensyn på t får vi fra kjerneregelen:

$$2x\frac{dx}{dt} + 0 = 2L\frac{dL}{dt}$$

Når $L = 50$ er $x^2 = 50^2 - 30^2 = (25-9)10^2 = 1600$ så $x = 40$ km. Vi får

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{2x}\frac{dL}{dt} = \frac{L}{x}\frac{dL}{dt}$$

som når $L = 50$ gir

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L=50} = \frac{50\ km}{40\ km}\left.\frac{dL}{dt}\right|_{L=50} = \frac{5}{4} \cdot 3.6 \cdot 3\ km/t = 13.5\ km/t.$$

$\square$