Utsatt Eksamen 8. juni 2012 **IR101805 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(15%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)
$$f(x) = (x^2+1)e^{2x}$$

(b)
$$g(x) = \cos^2(x^2)$$

(c)
$$h(x) = \frac{e^x}{x^4}$$

Oppgave 2 .... *(18%)*

Finn integralene

(a)
$$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$$

(b)
$$\int_0^{1/2} \frac{x}{1+4x^2}\,dx$$

(c)
$$\int (x+1)\sin(3x)\,dx$$

Oppgave 3 .... *(6%)*

Finn grensa
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$$

Oppgave 4 .... *(11%)*

En kurve er gitt ved $4x^2+4xy+3y^2=8$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

(b) Finn de punktene der tangentlinja til kurven er horisontal.

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen er lærebok, formelsamling fra videregående skole og kalkulator tillatt. *Håndskrevne notater i lærebok og formelsamling er lov. Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 5 .... *(6%)*

Ei øy er 500 meter lang. Vi måler bredden av øya normalt på lengderetningen hver 50. meter. Resultatet er vist i tabellen under. (Alle mål er i meter.)

Lengde	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Bredde	0	23	49	102	95	114	87	54	27	14	0

Bruk Simpsons formel til å finne en tilnærma verdi for flateinnholdet av øya.

Oppgave 6 .... *(18%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 3x - 2x^2$ avgrenser et flatestykke F med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgave 7 .... *(12%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

(b) $y'' - 4y' + 5y = 0$ der $y(0) = 2$ og $y'(0) = 4$.

Oppgave 8 .... *(14%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x - xy$$

med startbetingelse $y(0) = 2$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(0.9)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.3$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(0.9)$.

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 . . . . *(15%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)
$$f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$$

(b)
$$g(x) = \cos^2(x^2)$$

(c)
$$h(x) = \frac{e^x}{x^4}$$

Oppgåve 2 . . . . *(18%)*

Finn integrala

(a)
$$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$$

(b)
$$\int_0^{1/2} \frac{x}{1+4x^2}\,dx$$

(c)
$$\int (x+1)\sin(3x)\,dx$$

Oppgåve 3 . . . . *(6%)*

Finn grensa
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$$

Oppgåve 4 . . . . *(11%)*

Ei kurve er gitt ved $4x^2 + 4xy + 3y^2 = 8$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne eit uttrykk for y'.

(b) Finn dei punkta der tangentlinja til kurva er horisontal.

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og formelsamling frå vidaregåande skule lovleg. *Handskrivne notat i lærebok og formelsamling er lovleg. Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 5 .... *(6%)*

Ei øy er 500 meter lang. Vi måler breidda av øya normalt på lengderetninga kvar 50. meter. Resultatet er vist i tabellen under. (Alle mål er i meter.)

Lengde	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Bredde	0	23	49	102	95	114	87	54	27	14	0

Bruk Simpsons formel til å finne ein tilnærma verdi for flateinnholdet av øya.

Oppgåve 6 .... *(18%)*

Grafane til funksjonane $f(x) = x^2$ og $g(x) = 3x - 2x^2$ avgrensar eit flatestykke F med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn volumet av den romlekamen som blir danna når flatestykket F blir dreidd ein gong om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgåve 7 .... *(12%)*

Løys differensiallikningane

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

(b) $y'' - 4y' + 5y = 0$ der $y(0) = 2$ og $y'(0) = 4$.

Oppgåve 8 .... *(14%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x - xy$$

med startverdi $y(0) = 2$.

(a) Finn ein tilnærma verdi for $y(0.9)$ ved Euler's metode med steglengd $h = 0.3$.

(b) Finn løysninga $y(x)$ eksakt og rekn ut $y(0.9)$.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(15%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)
$$f(x) = (x^2+1)e^{2x}$$

(b)
$$g(x) = \cos^2(x^2)$$

(c)
$$h(x) = \frac{e^x}{x^4}$$

Løsning. (a) Produktregelen

$$f'(x) = (2x)e^{2x} + (x^2+1)2e^{2x} = 2(x^2+x+1)e^{2x}.$$

(b) Kjerneregel et par ganger

$$g'(x) = 2\cos(x^2)(-\sin(x^2))(2x) = -2x\sin(2x^2).$$

(c) Kvoitentregel eller omskriving $h(x) = x^{-4}e^x$, så

$$h'(x) = -4x^{-5}e^x + x^{-4}e^x = \frac{e^x(x-4)}{x^5}.$$

□

Oppgave 2 .... *(18%)*

Finn integralene

(a)
$$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx$$

(b)
$$\int_0^{1/2} \frac{x}{1+4x^2}\,dx$$

(c)
$$\int (x+1)\sin(3x)\,dx$$

Løsning. (a) Fra f.eks. *abc*-formelen er $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$. Delbrøk.

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Da må $A+B=1$ og $3A-2B=8$. Får $3(1-B)-2B = 3-5B = 8$ så $B=-1$ og da må $A = 1-(-1) = 2$.

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}\,dx = 2\ln|x-2| - \ln|x+3| + C.$$

(b). Substituerer $u = 1+4x^2$, så $du = 8xdx$. Da blir

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{1+4x^2}\,dx = \int_{noe}^{anna} \frac{\frac{1}{8}}{u}\,du = \frac{1}{8}\left[\ln|1+4x^2|\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8}\left(\ln|1+1| - \ln|1+0|\right) = \frac{1}{8}\ln 2.$$

(c) Delvis integrasjon. Deriverer $u = (x+1)$ og integrerer $v' = \sin(3x)$ og bruker formelen $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$.

$$\begin{aligned}\int (x+1)\sin(3x)\,dx &= -\frac{1}{3}(x+1)\cos(3x) - \int (-\frac{1}{3}\cos(3x))\,dx \\ &= -\frac{1}{3}(x+1)\cos(3x) + \frac{1}{9}\sin(3x) + C.\end{aligned}$$

□

Oppgave 3 .... *(6%)*

Finn grensa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$$

Løsning. Får 0/0 uttrykk og kan bruke l'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2(2x)}}{\frac{1}{1+x}} = \frac{2/1}{1/1} = 2.$$

□

Oppgave 4 .... *(11%)*

En kurve er gitt ved $4x^2 + 4xy + 3y^2 = 8$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

(b) Finn de punktene der tangentlinja til kurven er horisontal.

Løsning. (a) Deriverer begge sider m.h.p. x.

$$8x + (4y + 4xy') + 6yy' = 0 \Leftrightarrow (8x+4y) + (4x+6y)y' = 0.$$

Flytter $(8x+4y)$ over på motsatt side og deler så begge sider på $(4x+6y)$ og får

$$y' = -\frac{8x+4y}{4x+6y}.$$

(b) Tangentlinja er horisontal når $y' = 0$ og

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{8x+4y}{4x+6y} = 0 \Rightarrow 8x+4y = 0 \Rightarrow y = -2x.$$

Setter $y = -2x$ i likninga for kurven og får

$$4x^2 + 4x(-2x) + 3(-2x)^2 = 8 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x^2 + 12x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Vi får to løsninger $x = 1$ og $x = -1$. Det gir punktene $(1,-2)$ og $(-1,2)$ i det vi brukte at $y = -2x$. □

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 5 .... *(6%)*

Ei øy er 500 meter lang. Vi måler bredden av øya normalt på lengderetningen hver 50. meter. Resultatet er vist i tabellen under. (Alle mål er i meter.)

Lengde	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Bredde	0	23	49	102	95	114	87	54	27	14	0

Bruk Simpsons formel til å finne en tilnærma verdi for flateinnholdet av øya.

Løsning. Fra Simpsons formel får vi at flateinnholdet A er omtrent S_{10}

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{50}{3}(0 + 4\cdot 23 + 2\cdot 49 + 4\cdot 102 + 2\cdot 95 + 4\cdot 114 + 2\cdot 87 + 4\cdot 54 + 2\cdot 27 + 4\cdot 14 + 0) \\ &= \frac{50}{3}\cdot 1744 \approx 29067 \qquad (m^2) \end{aligned}$$

$\square$

Oppgave 6 .... *(18%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 3x - 2x^2$ avgrenser et flatestykke F med areal A.

(a) Finn arealet A.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Løsning. Skjæringpunkt mellom $f(x)$ og $g(x)$. $x^2 = 3x - 2x^2$ når $3x^2 = 3x$ altså $x^2 = x$. Dvs. $x = 0$ eller $x = 1$. Ser at $f(x)$ ligger under $g(x)$ på intervallet $0 \le x \le 1$.

(a)

$$A = \int_0^1 (3x - 2x^2) - (x^2)\,dx = \int_0^1 3x - 3x^2\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - x^3\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(b) Finner

$$V_{x=0} = 2\pi\int_0^1 x(3x - 2x^2 - x^2)\,dx = 2\pi\int_0^1 3x^2 - 3x^3\,dx = 2\pi\left[x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = 2\pi(1 - \frac{3}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Fra (a) har vi $m = A = 1/2$. Fra (b) har vi $M_{x=0} = V_{x=0}/2\pi = 1/4$. Finner $M_{y=0}$:

$$\begin{aligned} M_{y=0} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x - 2x^2)^2 - (x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 9x^2 - 12x^3 + 4x^4 - x^4\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[3x^3 - 3x^4 + \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{3}{5} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \qquad \bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m} = \frac{3/10}{1/2} = \frac{3}{5}.$$

$\square$

Oppgave 7 .... *(12%)*

Løs differensiallikningene

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.

(b) $y'' - 4y' + 5y = 0$ der $y(0) = 2$ og $y'(0) = 4$.

Løsning. (a) Karakteristisk likning $r^2 - 5r + 6 = 0$ som har løsninger $r_1 = 2$ og $r_2 = 3$ (fra *abc*-formelen). Tilfelle I. Likninga har løsning

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

(b) Karakteristisk likning $r^2 - 4r + 5 = 0$ som har løsning

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = 2 + 1i.$$

Tilfelle III med $k = 2$ og $\omega = 1$. Generell løsning

$$y(x) = Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x = e^{2x}(A \cos x + B \sin x).$$

og det gir

$$y'(x) = 2e^{2x}(A \cos x + B \sin x) + e^{2x}(-A \sin x + B \cos x) = e^{2x}((2A+B) \cos x + (2B-A) \sin x).$$

Setter inn initialverdiene

$$y(0) = e^0(A \cos 0 + B \sin 0) = A = 2$$

og

$$y'(0) = e^0((2A + B) \cos 0 + (2B - A) \sin 0) = 2A + B = 4.$$

Det gir $B = 4 - 2A = 4 - 4 = 0$. Spesiell løsning

$$y(x) = 2e^{2x} \cos x.$$

□

Oppgave 8 .... *(14%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x - xy$$

med startbetingelse $y(0) = 2$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(0.9)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.3$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(0.9)$.

Løsning. (a) Eulers metode $y_{n+1} = y_n + hy'(x_n, y_n)$. Har $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ og $h = 0.3$. Skal finne $y_1 \approx y(0.3)$, $y_2 \approx y(0.6)$ og $y_3 \approx y(0.9)$.

$$y_1 = y_0 + hy'(x_0, y_0) = 2 + 0.3(0 - 0 \cdot 2) = 2,$$

$$y_2 = y_1 + hy'(x_1, y_1) = 2 + 0.3(0.3 - 0.3 \cdot 2) = 1.91$$

$$y_3 = y_2 + hy'(x_2, y_2) = 1.91 + 0.3(0.6 - 0.6 \cdot 1.91) = 1.746\ldots.$$

Altså $y(0.9) \approx 1.75$ fra Eulers metode.

(b) Flytter xy på andre sida slik at likninga blir $y' + xy = x$. Lineær med integrerende faktor $F(x) = e^{\int x dx} = e^{x^2/2}$. Løsning

$$y(x) = \frac{1}{F(x)} \int xF(x)\, dx = e^{-x^2/2} \int xe^{x^2/2}\, dx = e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} + C) = 1 + Ce^{-x^2/2}.$$

Siden $y(0) = 2 = 1 + Ce^0 = 1 + C$ blir $C = 1$. Eksakt verdi

$$y(0.9) = 1 + e^{-(0.9)^2/2} = 1.6669\ldots \approx 1.67.$$

□