Utsatt Eksamen 3. juni 2013 **IR101805 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timer *Bokmål*

Hvis du blir ferdig med oppgavene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 uten bruk av hjelpemidler. Du kan bare bruke tillate hjelpemidler etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemidler tillatt.

Oppgave 1 .... *(15%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)
$$f(x) = (x^3 + \sin x)(\sqrt{x} + 1)$$

(b)
$$g(x) = (4 - x^2)^{10}$$

(c)
$$h(x) = \frac{x-1}{x^{2/3}}$$

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn grensa.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln(x)}$$

Oppgave 3 .... *(18%)*

Finn integralene.

(a)
$$\int \frac{x+3}{x^2 - 4x + 3}\,dx$$

(b)
$$\int \sqrt{2x+1}\,dx$$

(c)
$$\int x^2 e^{-x}\,dx$$

Oppgave 4 .... *(12%)*

En kurve er gitt ved $x^2 + xy - y^2 = 1$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

(b) Finn et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(2, 3)$.

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen er lærebok, formelsamling fra videregående skole og kalkulator tillatt. *Håndskrevne notater i lærebok og formelsamling er lov. Derivasjon og integrasjon skal utføres manuelt og mellomregninger føres inn. Differensiallikninger skal løses ved manuell metode. Kalkulatoren kan bare brukes til tallregning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianer.

Oppgave 5 . . . . *(7%)*

Sett opp integralet for lengden av kurven $f(x) = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne en tilnærmet verdi for lengden.
(Bruk $n = 2$, dvs. 4 delintervall.)

Oppgave 6 . . . . *(18%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$, og linja $x = 0$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgave 7 . . . . *(15%)*

Løs differensiallikningene.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$ der $y(1) = 3$.

(b) $y'' + 16y = 0$ der $y(0) = -6$ og $y'(0) = 32$.

(c) $y'' + y' - 6y = e^x$.

Oppgave 8 . . . . *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x(1 - y)$$

med startbetingelse $y(1) = 0$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(1.6)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.2$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(1.6)$.

Utsatt Eksamen 3. juni 2013 **IR101805 Matematikk 1**
Eksamenstid 4 timar *Nynorsk*

Om du blir ferdig med oppgåvene under del 1 før kl. 11.00, så kan og bør du starte på del 2 utan bruk av hjelpemiddel. Du kan bare bruke lovlege hjelpemiddel etter kl. 11.00.

Ta med **all mellomrekning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Del 1. (09.00-11.00). I denne delen er ingen hjelpemiddel lovleg.

Oppgåve 1 .... *(15%)*

Deriver funksjonane med omsyn på x.

(a)
$$f(x) = (x^3 + \sin x)(\sqrt{x} + 1)$$

(b)
$$g(x) = (4 - x^2)^{10}$$

(c)
$$h(x) = \frac{x-1}{x^{2/3}}$$

Oppgåve 2 .... *(5%)*

Finn grensa.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln(x)}$$

Oppgåve 3 .... *(18%)*

Finn integrala.

(a)
$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+3}\, dx$$

(b)
$$\int \sqrt{2x+1}\, dx$$

(c)
$$\int x^2 e^{-x}\, dx$$

Oppgåve 4 .... *(12%)*

Ei kurve er gitt ved $x^2 + xy - y^2 = 1$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne eit uttrykk for y'.

(b) Finn eit uttrykk for linja som tangerer kurva i punktet $(2, 3)$.

Del 2. (11.00-13.00). I denne delen av eksamen er kalkulator, lærebok og formelsamling frå vidaregåande skule lovleg. *Handskrivne notat i lærebok og formelsamling er lovleg. Derivasjon og integrasjon skal utførast manuelt og mellomrekningar skal førast inn. Differensiallikningar skal løysast ved manuell metode. Kalkulatoren kan berre brukast til talrekning og eventuelt til kontroll.*

Sett kalkulatoren på radianar.

Oppgåve 5 .... *(7%)*

Sett opp integralet for lengda av kurva $f(x) = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne ein tilnærma verdi for lengda.
(Bruk $n = 2$, dvs. 4 delintervall.)

Oppgåve 6 .... *(18%)*

Grafane til funksjonane $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$, og linja $x = 0$ avgrensar eit flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn volumet av den romlekamen som blir danna når flatestykket F blir dreidd ein gong om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Oppgåve 7 .... *(15%)*

Løys differensiallikningane.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$ der $y(1) = 3$.

(b) $y'' + 16y = 0$ der $y(0) = -6$ og $y'(0) = 32$.

(c) $y'' + y' - 6y = e^x$.

Oppgåve 8 .... *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x(1 - y)$$

med startverdi $y(1) = 0$.

(a) Finn ein tilnærma verdi for $y(1.6)$ ved Euler's metode med steglengd $h = 0.2$.

(b) Finn løysninga $y(x)$ eksakt og rekn ut $y(1.6)$.

Del 1. (09.00-11.00).

Oppgave 1 .... *(15%)*

Deriver funksjonene med hensyn på x.

(a)

$$f(x) = (x^3 + \sin x)(\sqrt{x} + 1)$$

(b)

$$g(x) = (4 - x^2)^{10}$$

(c)

$$h(x) = \frac{x-1}{x^{2/3}}$$

Løsning. (a) Produktregelen gir

$$f'(x) = (3x^2 + \cos x)(\sqrt{x} + 1) + (x^3 + \sin x)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(b) Kjerneregelen gir

$$g'(x) = 10(4 - x^2)^9(-2x) = -20x(4 - x^2)^9.$$

(c) Kan bruke kvotientregel eller skrive om $h(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$ slik at

$$h'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3} = \frac{x^{2/3} - (x-1)\frac{2}{3}x^{-1/3}}{x^{4/3}} = \frac{\frac{1}{3}x^{2/3} + \frac{2}{3}x^{-1/3}}{x^{4/3}},$$

som alle er fullgode svar. □

Oppgave 2 .... *(5%)*

Finn grensa.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln(x)}$$

Løsning. Innsetting gir $-\infty$ både over og under brøken, så vi kan bruke l'Hopital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln(x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x+2}{x^2+2x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+2}{x+2} = 1.$$

□

Oppgave 3 .... *(18%)*

Finn integralene.

(a)

$$\int \frac{x+3}{x^2 - 4x + 3}\,dx$$

(b)

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx$$

(c)

$$\int x^2 e^{-x}\,dx$$

Løsning. (a) Delbrøk. $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ ved f.eks. abc-formelen.

$$\frac{x+3}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

Likning $x+3 = A(x-1) + B(x-3)$. Sett $x = 1$ og få $4 = -2B$, så $B = -2$. Sett $x = 3$ og få $6 = 2A$, så $A = 3$. Integrerer

$$\int \frac{x+3}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-1}\,dx = 3\ln|x-3| - 2\ln|x-1| + C.$$

(b) Substitusjon. La $u = 2x+1$ da er $du = 2dx$, mao. $\frac{1}{2}du = dx$.

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.$$

(c) Delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$+$	x^2	e^{-x}
$-$	$2x$	$-e^{-x}$
$+$	2	e^{-x}
$-$	0	$-e^{-x}$

Ganger nedover langs diagonalene og får

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

□

Oppgave 4 .... *(12%)*

En kurve er gitt ved $x^2 + xy - y^2 = 1$.

(a) Bruk implisitt derivasjon til å finne et uttrykk for y'.

(b) Finn et uttrykk for linja som tangerer kurven i punktet $(2,3)$.

Løsning. (a) Deriverer begge sider mhp. x:

$$2x + (y + xy') - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2y)y' = -(2x+y)$$

Dette gir

$$y' = -\frac{2x+y}{x-2y}.$$

(b) Setter punktet $(2,3)$ inn i y' for å finne stigningstall til tangenten

$$y'|_{(2,3)} = -\frac{2\cdot 2+3}{2-2\cdot 3} = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}.$$

Innsatt i ettpunktformelen blir dette til tangentlinja

$$y = y_0 + y'(x-x_0) = 3 + \frac{7}{4}(x-2).$$

□

Del 2. (11.00-13.00).

Oppgave 5 .... *(7%)*

Sett opp integralet for lengden av kurven $f(x) = x^2$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Bruk Simpson's formel til å finne en tilnærmet verdi for lengden.
(Bruk $n = 2$, dvs. 4 delintervall.)

Løsning. $f'(x) = 2x$, så $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx$. Integralet for buelengden blir

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Simpsons metode 4 delintervall gir punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/4$ og $x_4 = 1$ og $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} L \approx S_4 &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{12}\left(\sqrt{1 + 4(0)^2} + 4\sqrt{1 + 4(\frac{1}{4})^2} + 2\sqrt{1 + 4(\frac{1}{2})^2} + 4\sqrt{1 + 4(\frac{3}{4})^2} + \sqrt{1 + 4(1)^2}\right) \\ &\approx \frac{1}{12}(1 + 4.4721 + 2.8284 + 7.2111 + 2.2361) = 1.4790. \end{aligned}$$

□

Oppgave 6 .... *(18%)*

Grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = 2 - x$, og linja $x = 0$ avgrenser et flatestykke F i første kvadrant.

(a) Finn arealet til F.

(b) Finn volumet av det romlegemet som framkommer når flatestykket F roterer en gang om y-aksen.

(c) Finn tyngdepunktet i flatestykket F.

Løsning. Skjæringspunkt mellom f og g: $x^2 = 2 - x$ gir $x = 1$ (og $x = -2$). Tegner opp grafene og ser at $g(x)$ ligger over $f(x)$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

(a) Arealet blir

$$A = \int_0^1 (2 - x) - x^2\, dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{12 - 3 - 2}{6} = \frac{7}{6}.$$

(b) Bruker sylinderskallmetoden

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^1 x((2 - x) - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 2x - x^2 - x^3\, dx = 2\pi \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\pi\frac{(12 - 4 - 3)}{12} = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

(c) Finner moment om y-aksen ved å bruke (b)

$$M_y = \frac{V_y}{2\pi} = \frac{5}{12}.$$

Moment om x-aksen

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-x)^2 - (x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 4 - 4x + x^2 - x^4\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(4 - 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\frac{(30+5-3)}{15} = \frac{16}{15}.$$

Det gir

$$x_T = \frac{M_y}{A} = \frac{5/12}{7/6} = \frac{5}{14}$$

og

$$y_T = \frac{M_x}{A} = \frac{16/15}{7/6} = \frac{32}{35}.$$

□

Oppgave 7 . . . . *(15%)*

Løs differensiallikningene.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^3$ der $y(1) = 3$.

(b) $y'' + 16y = 0$ der $y(0) = -6$ og $y'(0) = 32$.

(c) $y'' + y' - 6y = e^x$.

Løsning. (a) Separabel likning

$$\int y^{-3}\,dy = \int x^2\,dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{3}x^3 + C \quad\Rightarrow\quad y^{-2} = -\frac{2}{3}x^3 - 2C$$

Setter vi inn $y = 3$ og $x = 1$ får vi

$$(3)^{-2} = -\frac{2}{3}1^3 - 2C \quad\Rightarrow\quad 2C = -\frac{2}{3} - \frac{1}{9} = -\frac{6}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{7}{9}.$$

Dermed $y^{-2} = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{9}$. Løser mhp y og får

$$\frac{1}{\frac{7}{9} - \frac{2}{3}x^3} = y^2 \quad\Rightarrow\quad y = \sqrt{\frac{9}{7-6x^3}} = \frac{3}{\sqrt{7-6x^3}}.$$

(b) Andre ordens lineær. Kar.likn. $\lambda^2 + 16 = 0$. Tilfelle III med $\alpha = 0$ og $\beta = \sqrt{16} = 4$. Generell løsning

$$y(x) = A\sin 4x + B\cos 4x$$

Da er $y' = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x$. Setter inn

$$y(0) = 0A + B = -6 \quad \text{og} \quad y'(0) = 4A - 0B = 32$$

slik at $B = -6$ og $A = 8$. Spesiell løsning

$$y(x) = 8\sin 4x - 6\cos 4x.$$

(c) Inhomogen andre ordens lineær. Kar.likn. $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ som har to løsninger $\lambda = -3$ og $\lambda = 2$ ved f.eks. abc-formelen. Generell løsning av homogen likning

$$y_h(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x}.$$

Gjetter partikulær løsning $y_p(x) = Ce^x$. Da må $y_p'(x) = Ce^x$ og $y_p''(x) = Ce^x$. Setter inn

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = Ce^x + Ce^x - 6Ce^x = -4Ce^x = e^x.$$

Da må $C = -\frac{1}{4}$. Løsning

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-3x} + Be^{2x} - \frac{1}{4}e^x.$$

□

Oppgave 8 . . . . *(10%)*

Ei differensiallikning er gitt ved

$$y' = x(1-y)$$

med startbetingelse $y(1) = 0$.

(a) Finn en tilnærmet verdi for $y(1.6)$ ved Euler's metode med steglengde $h = 0.2$.

(b) Finn løsningen $y(x)$ eksakt og regn ut $y(1.6)$.

Løsning. Bruker Euler's metode med $f(x,y) = x(1-y)$, $h = 0.2$, $x_0 = 1$ og $y_0 = 0$.

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)$	$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
1.0	0	$1(1-0) = 1$	$0 + 0.2(1) = 0.2$
1.2	0.2	$1.2(1-0.2) = 0.96$	$0.2 + 0.2(0.96) = 0.392$
1.4	0.392	$1.4(1-0.392) = 0.851$	$0.392 + 0.2(0.851) = 0.562$
1.6	0.562		

Fra Euler's metode får vi altså $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.4$ og $x_3 = 1.6$ med tilhørende y-verdier $y_0 = 0$, $y_1 = 0.2$, $y_2 = 0.392$ og $y_3 = 0.562$.

Vi får $y(1.6) \approx y_3 = 0.562$.

(b) Utganga og omstokka blir likninga $y' + xy = x$ som er første orden lineær. Integrerende faktor

$$F(x) = e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}.$$

Løsning (bruker substitusjonen $u = x^2/2$, $du = dx$)

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{F(x)}\int F(x)x\,dx = e^{-x^2/2}\int e^{x^2/2}x\,dx = e^{-x^2/2}\int e^u\,du \\ &= e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} + C) = 1 + Ce^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Finner C ved å sette inn

$$y(1) = 1 + Ce^{-1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -e^{1/2}$$

slik at

$$y(x) = 1 - e^{1/2}e^{-x^2/2} = 1 - e^{(1-x^2)/2}.$$

Da blir

$$y(1.6) = 0.54159\ldots$$

□