Fellesemnet i Matematikk

Dataingeniørstudiet i Ålesund hausten 2016

Hans Georg Schaathun

4. januar 2017

Video: Introduksjon til emnet

Velkomen til fellesemnet i matematikk for dataingeniør. Desse vevsidene er *eit kompendium* til emnet, og inneheld alle oppgåvene og mange føredrag.

Det fyrste føredraget vert halde i fyrste time, men foilane ser du i ruten ved sida av. Legg merke til at du kan klikka på ruten og trykka «F» for å få foilane i fullskjerm. I dei fleste lesarar kan du kan òg gjera ruta større ved å dra i hjørnet nedst til høgre.

Eg kan ikkje garantera at føredraga verkar i alle lesarar. Sjølv bruker eg chrome/chromium og firefox/iceweasel, og det verkar. Eg har ikkje hatt høve til å testa Internet Explorer, som er kjend for å vera inkompatibel med det meste anna. Der er stor risiko for at han ikkje verkar.

Me skal arbeida med oppgåver i klasserommet, og strukturen i kompendiet fylgjer kalenderen, med avsnitt for kvar time, samt avsnitt for for- og etterarbeid mellom timane.

Kompendiet finst òg i ein PDF-versjon, som du finn nedst på sida, men PDF-versjonen kan vera rotut fordi det primært er skrive for å lesast i ein vevlesar.

Kompendiet er tilgjengeleg frå to uavhengige tenarar:

1. `https://kerckhoffs.hials.no/matematikk1/`
2. `http://www.hg.schaathun.net/matematikk1/`

Dersom der skulle oppstå tekniske problem med den eine tenaren, er det greitt å ha notert seg den andre. Kompendiet er òg vist i BlackBoard, men er då avhengig av tenar (1) over.

1. Økt 1. Introduksjon til grenseverdiar

Dette kapittelet svarer nokonlunde til avsnitt 1.1 i Adams og Essex.

1.1. Presentasjon (fyrste time)

Video: Sprettball

Eg freistar å byggja heile kurset med utgangspunkt i konkrete, røynlege døme. Det fyrste dømet, i føredraget ved sidan av, simulerer ein sprettball. Spørsmålet som me drøfter er, kva er hastigheita til denne ballen?

1. Kor fort fell ballen over eit tidsrom, t.d. frå 0,5 til 1 sekund etter start?
2. Kor fort fell ballen akkurat på tidspunktet 0,5 sekund etter start?

I timen går me gjennom dømet over, og løyser oppgåva nedanfor i plenum.

Oppgåve 1.1 *Thorium-231 (Th^{231}) er svært radioaktivt med halveringstid på 25,52h. Sett du du har eit gram thorium. Etter 25,52h er der eit halvt gram thorium att. Etter t timar er attverande thoriummasse*

$$m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25{,}52}}$$

1. *Plot funksjonen $m(t)$ på intervallet $t = 0 \ldots 120$ (fem dagar).*
2. *Lat oss sjå på kor mykje thorium som forsvinn etter det fyrste døgeret, dvs. frå $t = 24$ timar og utover. Tabulér den gjennomsnittlege forsvinningsraten (i gram per time) på intervallet $[t, t + \Delta t]$ for $t = 24$ og $\Delta t = 24, 6, 2, 0{,}5, 0{,}1$.*
3. *Estimér det momentane massetapet på tidspunkt $t = 24$ timar.*

Plottet kan vera ei enkel handteikna skisse, eller du kan bruka datamaskin eller lommekalkulator.

Dersom du ikkje har kalkulator for handa, kan du til dømes bruka Wolfram Alpha:

`http://www.wolframalpha.com/`

Du kan t.d. skriva

1. `(1/2)^(t/25.52)`, for å plotta $m(t)$.
2. `(1/2)^(t/25.52) from 0 to 120`, bestemma intervallet for t i plottet.
3. `(1/2)^(t/25.52) where t=24`, for å rekna ut $m(t)$ i eitt punkt.

1.2. Øvingsoppgåver (andre time)

Studentane arbeider i grupper à 3–4 personar. Kvar student tek ansvar for éi av dei fire oppgåvene nedanfor, løyser ho og forklarer løysinga til resten av gruppa. Det er lov å hjelpa kvarandre undervegs. Det viktigaste er ikkje å løysa alle oppgåvene, men at alle skjøner korleis dei vert løyst.

Oppgåvene liknar sprettballføredraget og thoriumproblemet over, og alle består av tre hovudsteg:

1. Plotta ein funksjon.
2. Rekna ut gjennomsnittleg endring (t.d. hastigheit) i ulike intervall.
3. Estimera momentan endring i eit punkt.

Når de går gjennom løysingane, er det lurt å samanlikna dei, og sjå kva som er likt og ulikt.

Oppgåve 1.2 *Ein radiostasjon sendar med ein effekt på 1000 Watt. Signaleffekten minskar med avstanden, og dvs. at di lenger mottakaren er frå sendaren, di dårlegare vert mottaket. Signaleffekten på ein mottakar som står d meter frå sendaren er gjeve som*

$$p(d) = \frac{1000}{d^2}.$$

1. *Plot funksjonen $p(d)$ på intervallet $d = 0 \dots 30$.*
2. *Tenk deg ein mottakar som i utgangspunktet står $d = 10$ meter frå sendaren. Studer effekttapet når mottakeren vert flytta Δd meter bort frå sendaren. Tabulér gjennomsnittleg effekttap per meter når mottakaren flytter frå d til $d + \Delta d$ meter, for $\Delta d = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.*
3. *Estimér det momentane effekttapet (målt i W/m – Watt per meter) når mottakaren vert flytta frå $d = 10$ meter.*

Oppgåve 1.3 *Sjå for deg ein partikkel som beveger seg langs ein rett linje; lat oss si x-aksen. Posisjonen (i meter frå origo) på x-aksen etter t sekund er gjeve ved funksjonen*

$$x(t) = 3t^2 - 12t + 1.$$

1. *Plot funksjonen $x(t)$ på intervallet $t = 0 \dots 20$.*
2. *Studer hastigheita rundt tidspunktet $t = 10$. Tabulér gjennomsnittshastigheita på intervallet $[t, t + \Delta t]$ for $\Delta t = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.*
3. *Estimér den momentane hastigheita på tidspunktet $t = 10$ sekund.*

Oppgåve 1.4 *Tenk deg eit lodd som er hengt opp etter ein fjær i taket. Dersom me dreg loddet rett opp eller ned og so slipp, vil det dansa opp og ned i ein so-kalla* harmonisk rørsle. *I eit bestemt tilfelle er høgda over golvet (i meter) gjeve ved funksjon av tida (i sekund), som fylgjer*

$$h(t) = 2 + \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)$$

1. *Plot funksjonen $h(t)$ på intervallet $t = 0 \dots 20$.*
2. *Studer hastigheita rundt tidspunktet $t = 10$. Tabulér gjennomsnittshastigheita på intervallet $[t, t + \Delta t]$ for $\Delta t = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.*

3. *Estimér den momentane hastigheita på tidspunktet $t = 10$ sekund.*

NB! *Argumentet til* sin *er målt i radianar. Dersom du bruker lommekalkulator, må du sjå til at han er innstilt på radianar og ikkje gradar.*

Merknad 1 *Vinklar, gjennom heile kurset, vert alltid målt i radianar. Aldri i gradar. Det er m.a. fordi dei trigonometriske funksjonane (inkl.* sin*) er oppfører seg pent og er enkle å derivera, når me bruker gradar.*

Oppgåve 1.5 *Tenk deg ein cellekultur der kvar celle delar seg ein gong i døgeret (i gjennomsnitt). Lat t vera tida i dagar, og start med éi celle på tidspunkt $t = 0$. Talet på celler etter t dagar kan då skrivast som*

$$f(t) = 2^t$$

1. *Plott funksjonen $f(t)$ på intervallet $t = 0 \ldots 20$.*
2. *Studer cellevektsten rundt tidspunktet $t = 10$ dagar. Tabulér den gjennomsnittlege vekstraten i cellekulturen i løpet av intervallet $[t, t + \Delta t]$ for $\Delta t = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.*
3. *Estimér den momentane vekstraten på tidspunktet $t = 10$ dagar.*

1.3. Oppsummering (Heimearbeid)

1.3.1. Lesestoff

Denne økta svarer til kapittel 1.1 i Adams og Essex.

1.3.2. Repetisjon

Føredraget nedanfor illustrerer den eine av oppgåvene frå den fyrste timen. Dette er meint som en repetisjon, og kan henda som ein alternativ illustrasjon av problemet.

Legg merke til lydsporet, som du kan starta i spelaren nedst på foilen. Når du startar spelaren, vil føredraget halda fram og gå automatisk vidare foil for foil, men du kan stoppa det og bla att og fram i foilane.

Video: Cellevekst

Problem 1.1 *Me ser på ein cellekultur der kvar celle deler seg ein gong i døgeret (i gjennomsnitt). Lat t vera tida i dagar, og start med éi celle på tidspunkt $t = 0$. Talet på celler etter t dagar kan då skrivast som*

$$f(t) = 2^t$$

1. *Plott funksjonen $f(t)$ på intervallet $t = 0 \ldots 14$.*
2. *Studer cellevektsten rundt tidspunktet $t = 10$ dagar. Tabulér den gjennomsnittlege vekstraten i cellekulturen i løpet av intervallet $[t, t + \Delta t]$ for $\Delta t = 1, 0.1, 0.01, 0.001$.*

3. *Estimér den momentane vekstraten på tidspunktet* $t = 10$ *dagar.*

1.3.3. Læringsmål

Målet i den fyrste økta er å forstå konsepta *gjennomsnittlege og momentan vekstrate*, både generelt og i spesifikke døme (t.d. som fart).

2. Økt 2. Grenseverdiar

2.1. Førebuing (Heimearbeid)

Dette kapittelet svarer til avsnitt 1.2 i Adams og Essex.

Video: Sprettball med algebra

Problem 2.1 *Me slipp ein ball frå høgda* h_0 *meter over bakken. Formelen for høgda over bakken etter* t *sekund er*

$$h(t) = h_0 - 4.9t^2.$$

Finn eit uttrykk $v(t)$ *for hastigheita etter* t *sekund.*

Video: Avrundingsfeil

Problem 2.2 *Finn grensa*

$$\lim_{x\to 0}(1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} =$$

Med ein datamaskin kan ein prøva seg fram med stadig mindre verdiar av x ($x \to 0$), og dermed estimera grensa. Men der er ein fallgruve...

Video: Tre enkle døme på grenseverdi

Problem 2.3 *Finn fylgjande grenser*

1. $\lim_{x\to 0} x^2$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$
4. $\lim_{x\to 1} f(x)$, *der*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Video: Ein- og tosidig grense

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{der } x > 0, \\ 0, & \text{der } x = 0, \\ -1, & \text{der } x < 0. \end{cases}$$

Kva kan me seia om grenseverdien $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Video: Oppsummering og rekneregalr

Sats 1 *La $P(x)$ og $Q(x)$ være to polynom. Då har me fylgjande grenseverdiar:*

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \tag{1}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad \textit{dersom } Q(a) \neq 0 \tag{2}$$

Denne satsen fylgjer enkelt frå ei rekkje enkle reglar for grenseverdiar ved addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Me går igjennom heile remsa i føredraget til høgre.

Video: Døme med sinus

Problem 2.4 *Finn* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

Dømet over illustrerer skvissatsen.

Sats 2 (Skvis-satsen) *Gå ut frå at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ for alle x på eit intervall på begge sider av a, bortsett frå akkurat i punktet $x = a$.*

Gå vidare ut frå at $f(x)$ og $h(x)$ har same grenseverdi når $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Då har me ogso

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Merknad 2 *Skvissatsen gjeld òg for kvar av dei einsidige grenseverdiene.*

2.2. Fyrste time (Plenumsdiskusjon)

Kva meiner me med ein grenseverdi?

Video: Quiz

Oppgåve 2.1 *Dei to oppgåvene nedanfor skal me gjera som ein* quiz *i Socrative. Foilane til høgre inneheld svaralternativ.*

Oppgåve 2.2 *Finn fylgjande grenser:*

1. $\lim_{x\to 1} x =?$
2. $\lim_{x\to 1} 3x =?$
3. $\lim_{x\to 1} 7 =?$

Lat a og c vera konstantar og finn fylgjande grenser:

4. $\lim_{x\to a} x =?$
5. $\lim_{x\to a} c =?$

6. $\lim_{x\to a} 2x + c = ?$

Oppgåve 2.3 *Finn fylgjande grenser:*

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 2) = \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 2}{x - 1} = \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x - 2) = \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \tag{7}$$

2.3. Andre time (Gruppearbeid)

Me bruker timen til å løysa oppgåvene i foilsettet som gruppearbeid. Oppgåvene er inspirert av, og tildels kopiert frå, Adams og Essex avsnitt 1.2.

Video: Oppgåver

2.4. Oppsummering/Etterarbeid

Læringsmåla for denne økta har vore:

1. Intuitiv forståing av grenseverdi
2. Kjenna notasjonen for grenseverdi
3. Kunne rekna ut grenseverdi for rasjonale funksjonar

Merknad 3 *Der er fleire oppgåver i læreboka, og oddetalsoppgåvene har òg fasit. Det er lurt å gjera so mange oppgåver som råd, for å læra stoffet.*

Oppgåvene for hovudopplegget i Matematikk 1 2015 var henta frå Adams og Essex kapittel 1.2: Oppgåvene 1, 3, 5, 7, 9, 15, 23, (37), 51, 57, 61 og 63.

3. Økt 3. Kontinuitet og uendelegheit

Dette kapittelet svarer til avsnitt 1.3-1.4 i Adams og Essex.

Læringsmål for økta er å

1. forstå kva det vil seia at ein funksjon er *kontinuerleg*
2. kunna analysera funkasjonar når x eller $f(x)$ går mot *uendeleg*

3. kjenna omgrepet *asymptote*

3.1. Forarbeid

Før den tredje økta må du sjå videoane om uendelegheit og kontinuitet. Mellom føredraga er der oppgåver som du bør tenkja gjennom og løysa for å sjekka at du har forstått videoane. Me vil drøfta oppgåvene i klassa, slik at alle forstår innhaldet.

3.1.1. Uendelegheit

Video: Sirkelareal

Problem 3.1 *Sjå på ein sirkel med radius r.*

Me veit at omkrinsen er gjeve som $O = 2\pi r$.

Vis korleis me kan utleida formelen for arealet.

Video: Grenser i det uendelege

Me veit at når $x \to 0$ so $\frac{1}{x} \to \infty$, og me skriv

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Kva skjer med $\frac{1}{x}$ når $x \to \infty$?

Kva meiner me med $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$?

Video: Polynom mot uendeleg

Problem 3.2 *Finn fylgande grenseverdiar, eller forklar kvifor dei ikkje eksisterer:*

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 1000x^2 - 100x \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{x^4}{1000} + x^3 - 1000x^2 - 100x \tag{9}$$

Oppgåve 3.1 *Finn fylgande grenseverdi, eller forklar kvifor han ikkje eksisterer:*

$$\lim_{x\to\infty} x^4 - 10x^2 + 7x - 5 \tag{10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 - 10x^2 + 7x - 5 \tag{11}$$

Video: Rasjonale funksjonar mot uendeleg

Problem 3.3 *Kva skjer med fylgjande funksjonar når $x \to \infty$ og når $x \to -\infty$?*

$$f(x) = \frac{x^3 - 1000x^2 - 100x}{-\frac{x^4}{1000} + x^3 - 1000x^2 - 100x} \tag{12}$$

$$g(x) = \frac{-\frac{x^4}{1000} + x^3 - 1000x^2 - 100x}{x^3 - 1000x^2 - 100x} \tag{13}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - 10x^2 - 2x}{x^3 + 5x^2 - 2} \tag{14}$$

Finn grenseverdiane eller forklar kvifor dei ikkje eksisterer.

Oppgåve 3.2 *Finn fylgande grenseverdiar, eller forklar kvifor dei ikkje eksisterer:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x} \tag{15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x} \tag{16}$$

Video: Kvadratrøtter mot uendeleg

Problem 3.4 *Kva skjer med fylgjande funksjonar når $x \to \infty$ og når $x \to -\infty$?*

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x \tag{17}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}+x} \tag{18}$$

Finn grenseverdiane eller forklar kvifor dei ikkje eksisterer.

Oppgåve 3.3 *Finn fylgande grenseverdiar, eller forklar kvifor dei ikkje eksisterer:*

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+1} - 2x \tag{19}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+1} - 2x \tag{20}$$

3.1.2. Kontinuitet

Video: Kontinuitet

Vi blar igjennom ein serie kjende funksjonar, og ser kva som er kontinuerlige og kva som er diskontinuerlege.

Video: Kontinuitet definert

Definisjon 1 *Lat $f(x)$ vera ein funksjon og at (a, b) er eit ope intervall der $f(x)$ er definert. Me seier at $f(x)$ er kontinuerleg i punktet $x_0 \in (a, b)$ dersom*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Video: Figur

Oppgåve 3.4 *Sjå på funksjonen $f(x)$ som definert i plottet ved sidan av. Svar på fylgjande*

1. *I kva punkt x er $f(x)$ diskontinuerleg?*
2. *I kva punkt x er $f(x)$ udefinert?*

Video: Tre ting du kan gjera med kontinuerlege funksjonar

1. Halveringsmetoden
2. Kontinuerleg utviding
3. Min-max-satsen

3.2. Etterarbeid

Det er alltid lurt å øva seg på so mange oppgåver som råd. Få vil koma gjennom alle oppgåvene nedanfor, men prøv å gjera nokon av dei.

Oppgåve 3.5 (Undelegheit) *Frå Adam og Essex, kapittel 1.3: 1, 3, 5, 9, 11, 13, 19 og 31.*

Oppgåve 3.6 (Kontinuitet) *Frå Adam og Essex, kapittel 1.4: 1, 3, 7, 13, 17, 29 og 39.*

4. Økt 4. Frå grenseverdi til derivasjon

Økt 4 er hovudsakleg ei obligatorisk øving. I tillegg er der ei lett introduksjon til tangentar og derivasjon, og me føreset at de hugsar litt av det grunnleggjande stoffet om derivasjon frå vidaregåande skule eller tilsvarande.

Adams og Essex gjev ein tilsvarande introduksjon i kapittel 2.1-2.2.

4.1. Tangent og derivasjon

Video: Fart og andre vekstrater

Definisjon 2 (Den deriverte) *Me definerer den deriverte av $f(x)$ som*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Me vil bruka eit par forskjellige skrivemåtar for den deriverte. Lat $y = f(x)$. Alle dei fylgjande skrivemåtane viser til den same deriverte, $f'(x)$ som definert over:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Boka nemner eit par andre i tillegg:

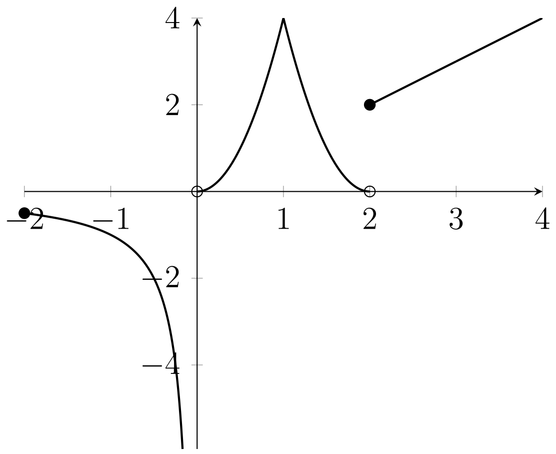
$$f'(x) = y' = D_x y = D_x f(x) = Df(x)$$

Kvar skrivemåte har sine føremonar, og me vel det som høver best til ei kvar tid.

Video: Tangent

Den deriverte $f'(x)$ av ein funksjon $f(x)$ er stigningstalet åt tangenten til kurva åt $f(x)$ i punktet x.

Men kva meiner me eigentleg med ein *tangent*?



Figur 1: Funksjonen f.

4.2. Obligatorisk øving

Oppgåve 4.1 *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-x} \tag{21}$$

Oppgåve 4.2 *Sjå på funksjonen $f(x)$ i figur 1. Svar på fylgjande:*

1. *I kva punkt x er $f(x)$ diskontinuerleg?*
2. *I kva punkt x er $f(x)$ udefinert?*
3. *I kva punkt x har kurven til $f(x)$ ein tangent?*

Oppgåve 4.3 *Finn ei likning for ein rett linje som tangerer*

$$y = 3x + 2$$

i punktet $(1, 5)$.

Oppgåve 4.4 *Lat $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Lat $g(x)$ vera definert som*

$$g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Finn eit uttrykk for $g(x)$ (utan å bruka $\lim$-operatoren).

Oppgåve 4.5 *Finst der ein tangent til*

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

i punktet $(1, f(1))$? Dersom svaret er ja, gje ei likning for tangenten.

Oppgåve 4.6 *Me har ein funksjon $f(x)$, og me kjenner grenseverdien*

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = -1.$$

Finn fylgjande grenseverdiar:

$$\lim_{x\to 1} f(x), \tag{22}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x}. \tag{23}$$

5. Økt 5. Optimering

I timen vil me fokusera på oppgåver som set derivasjon i perspektiv. Forarbeidet i avsnitt 5.2 gjev ein introduksjon til dette.

Parallelt med dette er det viktig å repetera grunnleggjande derivasjonsreglar som de bør kunna frå før. Avsnitt 5.1 er starten på dette, og det arbeider me vidare med i Økt 6. Dette stoffet finn de òg i Adams og Essex kapittel 2.3.

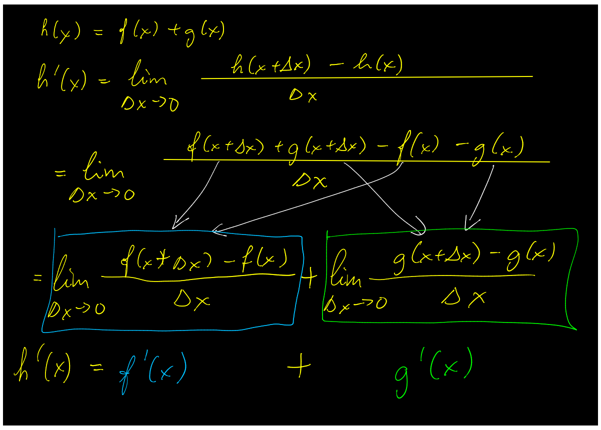
5.1. Velkjende derivasjonsreglar

Mykje av stoffet om derivasjon er kjent frå matematikken i vidaregåande skule, forkurs eller sumarkurs. Videoane nedanfor presenterer reknereglar som skal vera kjende, men det kan henda at dei gjev eit nytt og nyttig perspektiv.

$\frac{d}{dx} x^9 = \underline{\underline{9 \cdot x^8}}$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} x^r = r \cdot x^{r-1}$

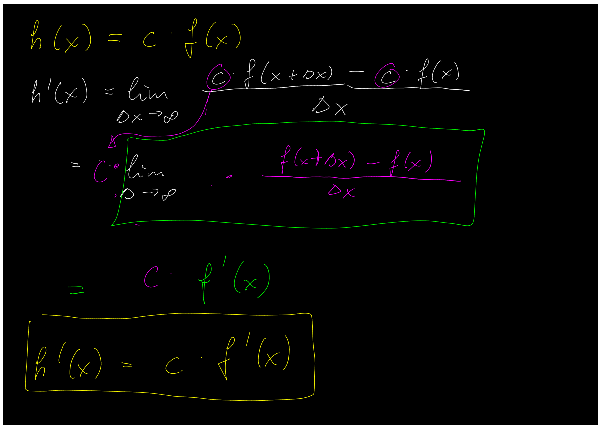
Problem 5.1 *Finn den deriverte:*

$$\frac{d}{dx} x^9 =$$

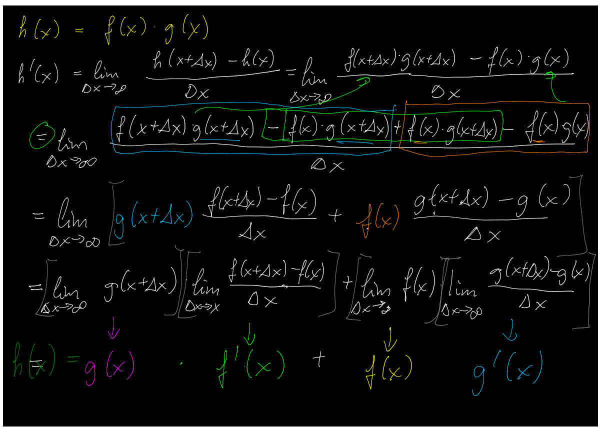


Problem 5.2 *Lat $f(x)$ og $g(x)$ vera to funksjonar, der me kjenner dei deriverte $f'(x)$ og $g'(x)$. Lat $h(x) = f(x) + g(x)$ og finn den deriverte $h'(x)$.*

Oppgåve 5.1 (Differanseregelen for derivasjon) *Lat $f(x)$ og $g(x)$ vera to funksjonar, der me kjenner dei deriverte $f'(x)$ og $g'(x)$. Lat $h(x) = f(x) - g(x)$ og finn den deriverte $h'(x)$.*



Problem 5.3 *Lat $f(x)$ vera ein deriverbar funksjonar, og skriv $h(x) = c \cdot f(x)$ for ein eller annan konstant c. Finn $h'(x)$.*



Problem 5.4 *Lat $f(x)$ og $g(x)$ vera deriverbare funksjonar, og skriv $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Finn $h'(x)$.*

Oppgåve 5.2 *Lat $f(x) = 1/x$. Bruk definisjonen*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

for å finna $f'(x)$.

Oppgåve 5.3 *Lat $f(x) = 1/x$. Hugs at $1/x = x^{-1} = f(x)$ og bruk den generelle regelen for potenser (Problem 5.1) for å finna $f'(x)$.*

Samanlikn svaret med svaret i forrige oppgåve.

Sats 3 (Resiprokalregelen (generell form)) *Den deriverte av $1/f(x)$ er gjeven som*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$$

Du finn eit bevis for resiprokalregelen i læreboka. Me skal gje eit anna bevis, basert på kjerneregelen, i neste økt.

Oppgåve 5.4 (Kvotientregelen for derivasjon) *Lat $f(x)$ og $g(x)$ vera to funksjonar, der me kjenner dei deriverte $f'(x)$ og $g'(x)$. Lat*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

og finn den deriverte $h'(x)$.

Legg merke til at

$$h(x) = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

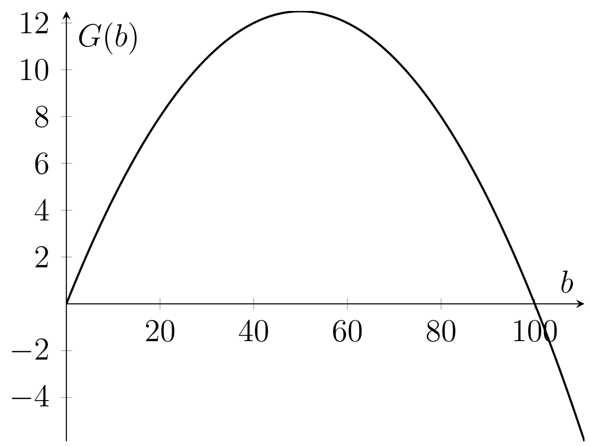
Du kan dermed bruka produktregelen, der resiprokalregelen gjev det eit uttrykk for

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}.$$

5.2. Forarbeid (introduksjon til timen)

Kva bør torskekvoten for kystfisket vera i 2017?

Video: Matematikken i fiskeforvalting



Figur 2: Ein enkel vekstfunksjon for ein fiskeførekomst.

5.3. Eit samfunnspørsmål (fyrste time)

Kva bør torskekvoten for kystfisket vera i 2017?

Regulering av naturressursane er ein viktig politisk oppgåve. Dersom fisket er for stort, døyr fisken ut. Dersom fisket er for lite, døyr fiskerinæringa ut. For å finna optimale kvotar treng me modellar for fiskeførekomsten og me treng sosialøkonomiske modellar som ser samanhengen mellom ulike næringar, prissetjing m.m. Vidare treng me matematikk for å uttrykkja modellane på ein presis måte.

For dei aller fleste praktiske problem er modellane so kompliserte at me treng datamaskiner for å løysa problemet eller simulera økosystemet og/eller økonomien. Dvs. me treng biologar, sosialøkonomar og dataingeniørar/-vitarar, og matematikken er det felles språket som dei treng for å samarbeida.

Diverre er me ikkje klar for å sjå på dei store, praktiske og mest interessante modellane enno. Me må øva opp matematikkforståinga gjennom forenkla modellar og problem. Prinsippa som me ser på er likevel dei same som vert brukt i meir avanserte modellar. Modellane nedanfor byggjer på Philip A. Neher: *Natural resource economics. Conservation and exploitation.* (1990).

Oppgåve 5.5 (Naturleg vekst) *Figur 2 viser ein mogleg vekstfunksjon. På horisontal-aksen har me fiskeførekomsten (biomassen) b i tonn. På vertikal-aksen (y-aksen) har me årleg naturleg vekst, $g(b)$, dvs. auka i biomassen i løpet av eitt år utan fiske. Funksjonen kan skrivast som*

$$g(b) = 0,005 \cdot b \cdot (100 - b).$$

Med utgangspunkt i denne vekstfunksjonen, diskuter fylgjande:

1. *Korleis vil førekomsten utvikla seg over tid? Sjå på ulike startverdiar for b. Kan førekomsten veksa til evig tid? Vil han nærma seg ein bestemt idealbestand?*

2. *Kan vekst vera negativ? Kva meiner me evt. med negativ vekst? Er der forskjell i tydinga av «vekst» i matematisk språk og i lekspråk?*

Oppgåve 5.6 (Vekst med fiske) *Me skal halda fram med vekstfunksjonen $g(b)$ frå forrige oppgåve, og sjå korleis fiske påverkar veksten i fiskeførekomsten. Me skriv x for fiskeuttaket i tonn, dvs. x er reduksjon i biomassen pga. fiske. Me skal studera kor stor x kan vera med* bærekraftig *fiske.*

Med utgangspunkt vekstfunksjonen $g(b)$, diskuter fylgjande:

1. *Kva meiner me med bærekraftig fiske? Ta utgangspunkt i vektsfunksjonen, og gje svaret både i matematisk form og med kvardagsord.*
2. *Funksjonen $g(b)$ tek ikkje omsyn til fiskeuttaket x. Korleis vil du beskriva nettoveksten når me tek omsyn til både naturleg vekst ($g(b)$) og fiskeuttaket (x)?*
3. *Sett at førekomsten er $b = 20$. Gje ein funksjon $h_{20}(x)$ for nettoveksten i fiskeførekomsten for variabelt fiskeuttak x.*
4. *For kva verdiar av fiskeuttaket x har me auke i førekomsten? For kva verdiar har me nedgang? (Me går stadig ut frå at førekomsten er $b = 20$.)*
5. *Sett at årleg fiskeuttak er $x = 100$. For kva førekomstar b har me auke i førekomsten? For kva verdiar har me nedgang?*
6. *Kva er det største moglege fiskeuttaket x med bærekraftig fiske? Kor stor må førekomsten vera for å gje dette maksimale fiskeuttaket?*
7. *Gje ein generell funksjon $h(b, x)$ for nettoveksten i fiskeførekomsten.*

Oppgåve 5.7 (Derivasjon) *Me skal halda fram med vekstfunksjonen frå oppgåve 5.5 og 5.6*

$$g(b) = 0,005 \cdot b \cdot (100 - b).$$

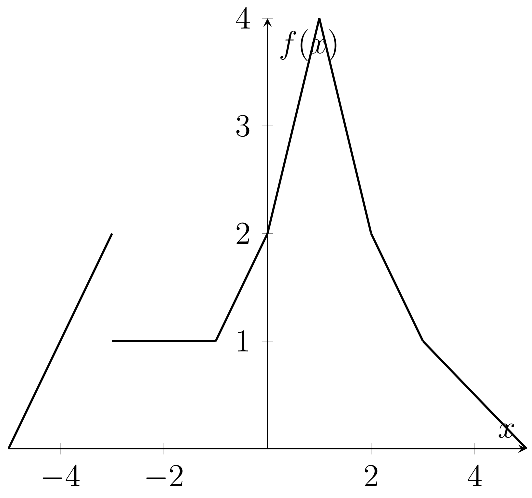
Svar på fylgjande spørsmål:

1. *Finn den deriverte $g'(b)$.*
2. *Løys likninga $g'(b) = 0$ for b.*
3. *Kva verdi av b maksimerer veksten $g(b)$?*

5.4. Funksjonstolking (andre time)

Oppgåve 5.8 *Sjå på funksjonen $f(x)$ i figur 3.*

1. *Teikn ei rask skisse av kurva til $f'(x)$.*
2. *For kva verdiar av x er $f(x)$ deriverbar.*



Figur 3: Funksjonen $f(x)$ til oppgåve 5.8.

Oppgåve 5.9 (Adams og Essex oppg. 47, s. 108 (fritt omskrive)) *Der er to distinkte rette liner som tangerer kurva $y = x^2$ og som passerer gjennom punktet $(1, -3)$. Find likningane for båe tangentane.*

Hint: *Tangeringspunkta er ikkje oppgjevne. Dei har formen (a, a^2).*

Oppgåve 5.10 *Gjer oppgåve 1–19 (ulike nummer) frå Adams og Essex kapittel 2.3 (side 115).*

6. Økt 6. Derivasjon

Denne økta inneheld mykje stoff frå kapittel 2.4-2.6 8 i Adams og Essex. De bør sjå alle føredraga før timen og tenkja gjennom oppgåvene. Me arbeider vidare med oppgåvene i timen.

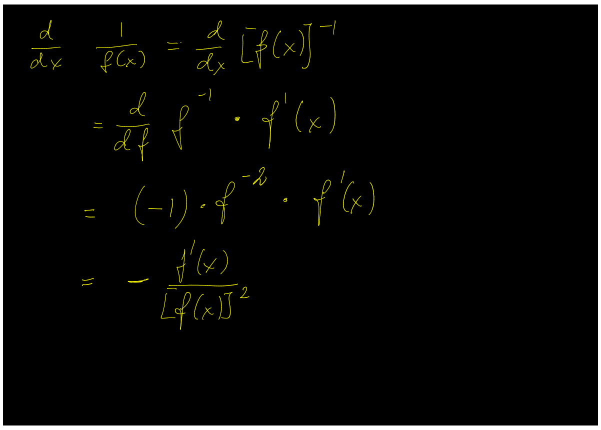
6.1. Kjerneregelen

Video: Kjerneregelen

Problem 6.1 *Sjå på ein kule som fell frå Preikestolen. Høgda i meter over fjprden etter t minutt er*

$$h(t) = 600 - 4{,}9[60t]^2.$$

Finn hastigheita etter t minutt i meter per minutt.



Resiprokalregelen seier at

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Bruk kjerneregelen for å bevisa denne regelen.

Video: Chain rule proof

Sats 4 *Lat $f(u)$ vera ein funksjon som er deriverbar på $u = g(x)$, og $g(x)$ ein funksjon som er deriverbar på x. Da er den samansette funksjonen $(f \circ g)(x)$ deriverbar på x, og*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Der finst mange bevis for kjerneregelen. Dette beviset er enkelt og intuitivt å forstå, og det gjeld for dei alle fleste funksjonar. Videoen gløymer derimot ein viktig føresetnad. Beviset er berre gyldig dersom $g(x+\Delta x) - g(x) \neq 0$ for alle $\Delta x \neq 0$ i eit nabolag rundt 0. Jf. WikiPedia og Adam og Essex s. 116.

Beviset i Adams og Essex (side 119f) er vanskelegare å forstå, men det er til gjengjeld gyldig for alle funksjonar.

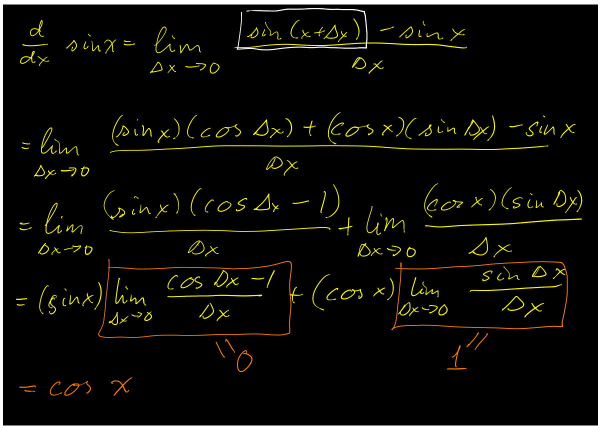
Video frå Khan Academy

Oppgåve 6.1 *Løys oppgåvene 1, 3, 5, 7, 37 frå kapittel 2.4 i Adams og Essex.*

6.2. Trigonometriske funksjonar

Video: Trigono-metrisk Funksjonar

Me bruker dei trigonometriske funksjonane til å modellera ei lang rekkje fysiske fenomen. Dei er mellom anna sentrale om du skal driva med prosessering, koding eller komprimering av (digitale) bilete og lyd.



Finn

$$\frac{d}{dx}\sin x =$$

Du treng m.a. grenseverdien

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

frå føredraget om skvissatsen (problem 2.4).

Oppgåve 6.2 *Løys oppgåvene 13, 15, 17 frå kapittel 2.5 i Adams og Essex.*

6.3. Derivasjon av høgare orden

Video: Akselerasjon

Video: Deriverte av høgare orden

Tenk igjen på sprettballen som fell. Kor raskt aukar farten?

Finn eit generelt uttryk for den $n$te-deriverte $f^{(n)}(x)$ der

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Oppgåve 6.3 *Finn fyrste-, andre- og tredjeordens deriverte, y', y'' og y''', der*

$$y = 3x^2 - \frac{1}{x}.$$

Oppgåve 6.4 *Finn eit generelt uttrykk for $f^{(n)}(x)$, der*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Byrja med å finna nok deriverte til å gissa eit mynster, og stadfest deretter mynsteret ved hjelp av matematisk induksjon.

Oppgåve 6.5 (Ekstra) *Løys oppgåve 1 frå kapittel 2.6 i Adams og Essex.*

6.4. Middelverdisatsen

Video: Mean value theorem

Sats 5 *Lat f vera ein funksjon som er kontinuerleg på $[a, b]$ (lukka intervall) og deriverbar på (a, b) (ope intervall), der $a < b$. Då finst der eit punkt $c \in (a, b)$ slik at den instantane vekstraten i punktet c er like den gjennomsnittlege vekstraten over $[a, b]$; med andre ord:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Video frå Khan Academy

Video: Getting a ticket because of the mean value theorem

Når fartsgrensa er t.d. 60km/h, so er det ei grense på instantan hastigheit. Det er ikkje lov å ha instantan fart over 60km/h. Lova seier inkje om gjennomsnittshastigheita.

Kan ein bruka gjennomsnittsmåling (dvs. målt gjennomsnittshastigheit) for å visa at ein bil har brote fartsgrensa? Kvifor/kvifor ikkje?

Video frå Khan Academy

Oppgåve 6.6 *Finn områda der funksjonen $f(x)$ er voksande og minkande. Dvs. for kva verdiar av x aukar $f(x)$? Og for kva verdiar minkar $f(x)$?*

1. $f(x) = x^2 - 1$

2. $f(x) = x^3 - 1.5x^2 + 1$

6.5. Program for timen

1. Fyrste time. Quiz med diskusjon. Hovudsakleg om kjerneregelen og trigonometriske funksjonar.

2. Andre time. Oppgåve 6.3 og 6.4 til drøfting.

Video: Quiz

Oppgåve 6.7 *Dei to oppgåvene nedanfor skal me gjera som ein* quiz *i Socrative. Foilane til høgre inneheld svaralternativ.*

7. Økt 7. Meir derivasjon

Denne økta inneheld stoff frå kapittel 2.7 og 2.9-2.10 i Adams og Essex. Føredraga er hovudsakleg gjennomarbeidde døme, og det viktigaste er å sjå og tenkja gjennom dess før timen.

7.1. Bruk av den deriverte

Video: Problemløysing

Problem 7.1 *Ta ein sirkel med radius r og ein trapes innskriven i sirkelen (dvs. at alle fire hjørna ligg på sirkelen), slik at grunnlinjen i trapesen er diameteren på sirkelen. Kva høgd skal trapesen ha for at arealet skal vera størst mogleg?*

Oppgåve 7.1 *Løys oppgåvene 1 og 11 frå kapittel 2.7 i Adams og Essex.*

7.2. Implisitt derivasjon

Video: Ballkast

Problem 7.2 *Sjå på ein sirkel med radius $r = 5$. Finn ei likning for tangenten til sirkelen i punktet $(3, 4)$. Kva med ein tangent i eit vilkårlet punkt (x, y)?*

Oppgåve 7.2 *Løys oppgåvene 1, 5, 7, 9, 11 (13) frå kapittel 2.9 i Adams og Essex.*

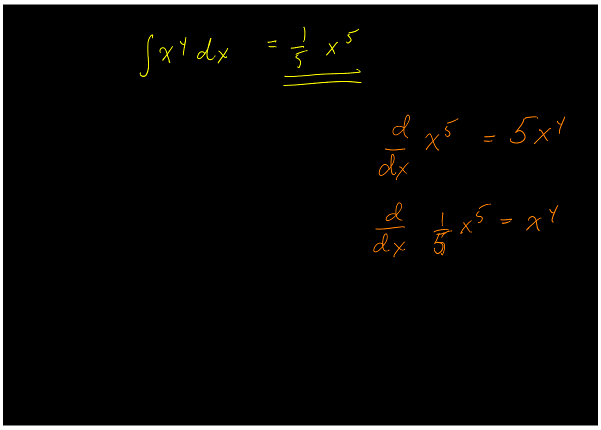
7.3. Antiderivasjon

Antiderivasjon er starten på to tema som er heilt sentrale når ein skal laga matematiske modellar av røynda: differentiallikningar (populært kalla difflikningar) og integrasjon. I dette avsnittet ser me på ubestemte integral og på den aller enklaste formen for differentiallikningar.

Video: Ballkast

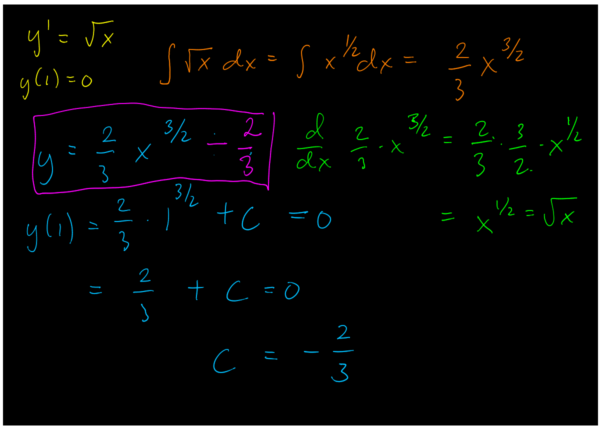
Problem 7.3 *Tenk deg at du kastar ei kule opp i vêret. Farten på ballen i høgderetninga når du slipp er $v_0 = 15$ m/s. Høgda når du slipp ballen er $h_0 = 1.8$ m over bakken.*

Kor høgt over bakken er ballen etter t sekund?



Problem 7.4 *Finn*

$$\int x^4 dx$$



Problem 7.5 *Finn $y(x)$ når*

$$y' = \sqrt{x} \tag{24}$$

$$y(1) = 0 \tag{25}$$

Oppgåve 7.3 *Løys oppgåvene 1, 5, 27, 29, 33 frå kapittel 2.10 i Adams og Essex.*

7.4. Program for timen

1. Fyrste time. Drøftingsoppgåver. Problemløysing basert på avsnitt 7.1-7.2.
2. Andre time. Antiderivasjon og difflikningar. Oppgåver frå avsnitt 7.3.

8. Økt 8. Funksjonar

Stoffet for denne økta er henta frå Adams og Essex kapittel 3.1–3.3.

8.1. Den inverse funksjonen

Definisjon 3 *Ein polynomfunksjon $P(x)$ har formen*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$$

der c_i er reelle tal for $i = 0, 1, \ldots$.

Definisjon 4 *Ein rasjonal funksjon $R(x)$ har formen*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

der P og Q er polynomfunksjonar.

Definisjon 5 *Ein algebraisk funksjon $A(x)$ har formen*

$$A(x) = (R(x))^{\frac{n}{m}}$$

der R er ein rasjonal funksjon, n eit heiltal og m eit naturleg tal ($1, 2, \ldots$).

Legg merke til at polynomfunksjonar er rasjonale (lat $Q(x) = 1$), og rasjonale funksjonar er algebraiske (lat $n = m = 1$).

Video: Transendentale Funksjonar

Algebraiske funksjonar vert oppbygd av ein variabel og endeleg mange aritmetiske operasjonar (plus, minus, gange, dele) og endeleg mange røter. Andre funksjonar er transendentale.

Definisjon 6 *Funksjonar som korkje er polynom, rasjonale eller algebraiske vert kalla transendentale funksjonar.*

Video: Inverse Funksjonar

Problem 8.1 *Sjå på ein ball som fall få ti meter. Høgda over bakken etter t sekund er gjeve ved*

$$h(t) = 10 - 4{,}9t^2.$$

Kor mange sekund tek det for ballen å falla til y meter over bakken?

Video: Om å derivera inversen

Sats 6 *Den deriverte til inversen til ein funksjon $f(x)$ er gjeve som*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Oppgåve 8.1 *Løys oppgåve 1, 3, 9, 11 (13) og 25 frå kapittel 3.1 i Adams og Essex. I oppgåve 25 gissar du løysinga til $g(x) = 1$, heller enn å finna f^{-1}.*

8.2. Eksponential- og logaritmefunksjonar

Video: Eksponentialfunksjonar

Problem 8.2 *Finn 2^π.*

Dei kjende definisjonane av eksponentialfunksjonen 2^x gjeld berre for rasjonale eksponentar x. Når π er irrasjonal treng me altso ein ny definisjon.

Video: Logaritmefunksjonar

Problem 8.3 *Har eksponentialfunksjonen a^x ein invers? Korleis kan me i so fall skildra denne inversen?*

Oppgåve 8.2 *Løys oppgåve 1, 3 og 5 frå kapittel 3.2 i Adams og Essex.*

8.3. Den naturlege logaritmen

Video: Om å integrera éin delt på x

Problem 8.4 *Kva er integralet (den antideriverte)* $\int \frac{1}{x} dx$*?*

Video: Den naturlege eksponentialfunksjonen

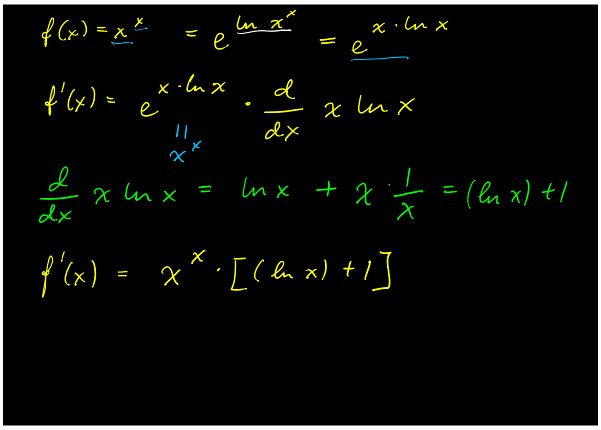
Problem 8.5 *Kva er inversen til* $\ln x$*?*

Oppgåve 8.3 *Løys oppgåve 1, 3 og 5, og 19-33 (odde) frå kapittel 3.3 i Adams og Essex.*

Definisjon 7 *Logaritmisk derivasjon baserer seg på identiteten*

$$f(x) = e^{\ln f(x)}.$$

Somme funksjonar $f(x)$ *er vanskeleg å derivera, medan* $e^{\ln f(x)}$ *er enkel. For å handtera eksponenten treng ein reknereglane for logaritmar for å forenkla og kjerneregelen for å derivera.*



Problem 8.6 *Finn den deriverte til* $f(x) = x^x$.

Oppgåve 8.4 (log-derivasjon) *Bruk logaritmisk derivasjon for å derivera* $f(x) = 4^{3x-1}$.

Oppgåve 8.5 (log-derivasjon) *Bruk logaritmisk derivasjon for å derivera* $f(x) = (\sin x)^{2x+1}$.

Oppgåve 8.6 (Ekstra) *Løys oppgåve 37 og 55 frå kapittel 3.3 i Adams og Essex.*

9. Økt 9. Meir derivasjon

Stoffet for denne økta er henta frå Adams og Essex kapittel 3.4–3.6.

9.1. Eksponentiell vekst og fall

Video: Eksponentiell vekst

Korleis løyser me differentiallikningar på denne formen?

$$y'(t) = k \cdot y, \tag{26}$$
$$y(0) = C \tag{27}$$

Video: Sukkerløysing

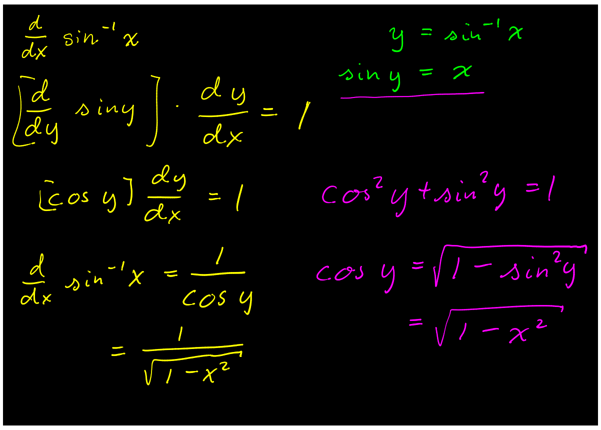
Problem 9.1 (Adams og Essex oppg. 10 s. 190) *Sukker vert oppløyst i vatn med ein rate proporsjonal med attverande mengd med uløyst sukker. Tenk deg at du har 50 kg uløyst sukker i vatn opprinneleg. Etter 5 timar er der 20 kg att. Kor mykje lenger tid vil det ta før 90% av sukkeret er oppløyst?*

Oppgåve 9.1 *Løys oppgåve 9, 11, 13, 25 (sjå example 3) frå kapittel 3.4 i Adams og Essex.*

9.2. Inverse trigonometriske funksjonar

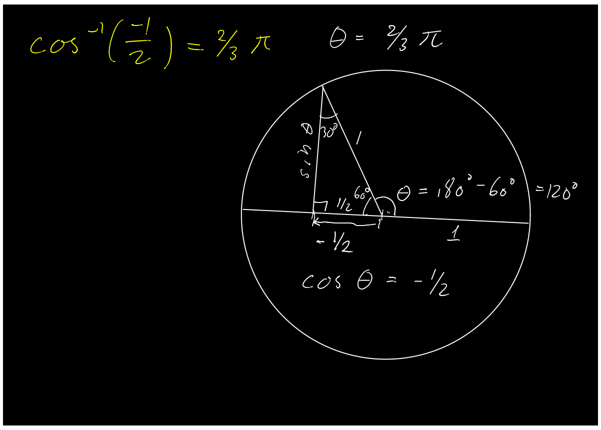
Video: Inverse trigonometriske funksjonar

Har $\sin$ ein invers?



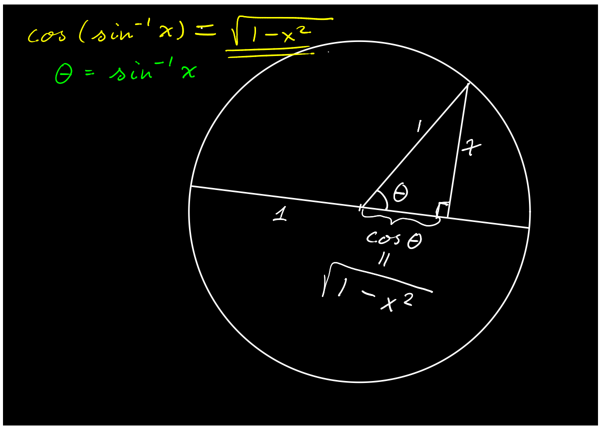
Problem 9.2 *Finn*

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x$$



Problem 9.3 *Finn* $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$.

Oppgåve 9.2 *Løys oppgåve 1, 3, 5 og 7 frå kapittel 3.5 i Adams og Essex utan å bruka maskin/kalkulator.*



Problem 9.4 *Finn* $\cos(\sin^{-1} x)$.

Oppgåve 9.3 *Løys oppgåve 13, 19, 23, 25 (29) og 53 frå kapittel 3.5 i Adams og Essex.*

9.3. Hyperbolske Funksjonar

Video: Hyperbolske Funksjonar

Me definerer dei hyperbolske funksjonane sinh og cosh.

Oppgåve 9.4 *Løys oppgåve 2 frå kapittel 3.6 i Adams og Essex.*

9.4. Program for timen

- Oppgåve 9.1 (diskusjonsoppgåver)

- Oppgåver om inverse trigonometriske funksjonar + evt. oppg. som me ikkje rakk i økt 7-8.

10. Økt 10. Obligatorisk øving

Oppgåve 10.1 (Frå eksamen 2013) *Lat*

$$f(x) = (x^3 + \sin x)(\sqrt{x} + 1).$$

Finn $f'(x)$, og vis korleis du kjem fram til svaret.

Oppgåve 10.2 (Frå eksamen 2013) *Ei kurve er gjeve ved likninga*

$$1 = x^2 + xy - y^2.$$

Finn eit uttrykk for y' vha. implisitt derivasjon, og vis korleis.

Oppgåve 10.3 *Forenkla uttrykket* $\sin(\tan^{-1} x)$.

Oppgåve 10.4 (fritt etter Adams og Essex oppg. 26 s. 136) *Ein fabrikk produserer kryssfinér. Profitten per dag, $P(x)$, når fabrikken produserer x finérplater er gjeve som*

$$P(x) = 8x - 0{,}005x^2 - 1\,000.$$

Kor mange plater skal fabrikken produsera per dag for å maksimera profitten?

Oppgåve 10.5 *Oppgåve 13 frå Adams og Essex side 160 (kapittel 2.11).*

Oppgåve 10.6 *Oppgåve 15 frå Adams og Essex side 190 (kapittel 3.4).*

11. Økt 11. Komplekse tal

Stoffet for denne økta er henta frå Adams og Essex bilag (appendix) I.

Video: Historia om tala

Definisjon 8 *Den imaginære eininga i er definert som løysinga til likninga $x^2 + 1 = 0$.*

BBC Radio har ein svært god serie med *podcasts* under tittelen *In Our Time*. Programmet om Imaginary Numbers gjev ein lett og interessant introduksjon til matematikkhistorien og motivasjonen bak imaginære og komplekse tal.

Video: Kompleks aritmetikk

Rekn ut

1. $(1 + 2i) + (5 - i) =$

2. $(1 + 2i) \cdot (5 - i) =$

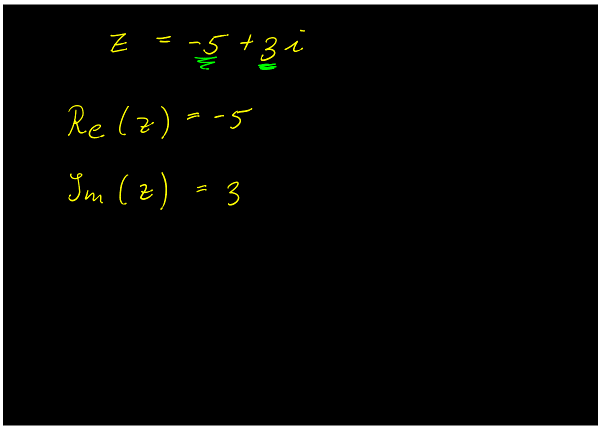
Me visualiserer det komplekse talet $z = a + bi$ som punktet eller vektoren (a, b) i eit plan.

Video: Det komplekse planet

Video: Polare koordinatar

Sats 7 *Lat z og w vera to komplekse tal. Då har me*

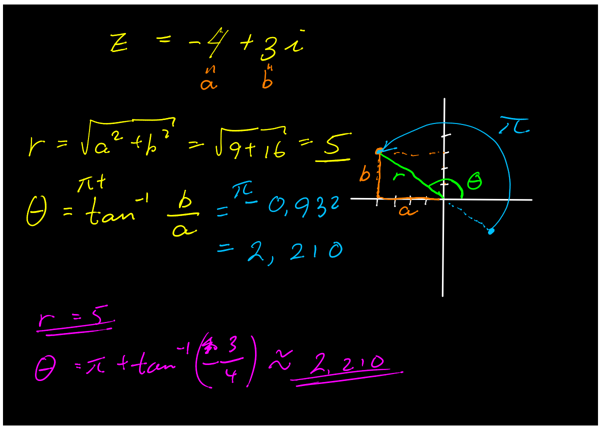
$$|zw| = |z| \cdot |w|,$$
$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$



Problem 11.1 *Lat*

$$z = -5 + 3i.$$

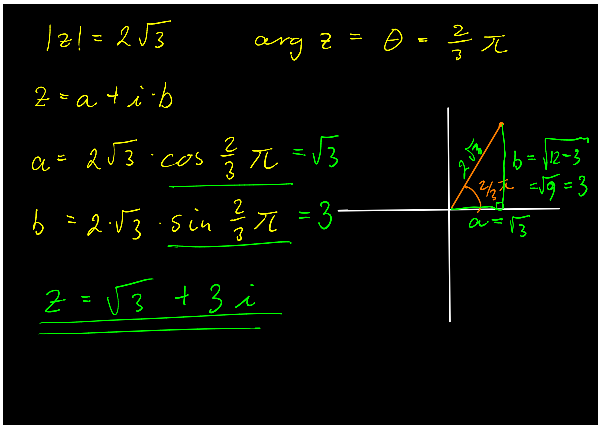
Finn $\Re(z)$ *og* $\Im(z)$.



Problem 11.2 *Lat*

$$z = -5 + 3i.$$

Finn $\arg(z)$ *og* $|z|$.



Problem 11.3 *Eit komplekst tal z er gjeve ved*

$$|z| = 2\sqrt{3}, \tag{28}$$

$$\arg z = \theta = \frac{2}{3}\pi. \tag{29}$$

Finn a og b slik at du kan skriva talet på formen $z = a + bi$.

Oppgåve 11.1 *Løys oppgåve 1-27 (odde), 35-42 (odde) i Appendix I i Adams og Essex*

I timen bruker me Socrative og løyser oppgåvene 2-28 (partal) og 36-42 (partal) frå Appendix I i Adams og Essex.

12. Økt 12. Komplekse funksjonar

Stoffet for denne økta er henta frå Adams og Essex bilag (appendix) I-II.

Video: Komplekse røter

Problem 12.1 *Me har likninga*

$$z = w^n.$$

Skriv

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

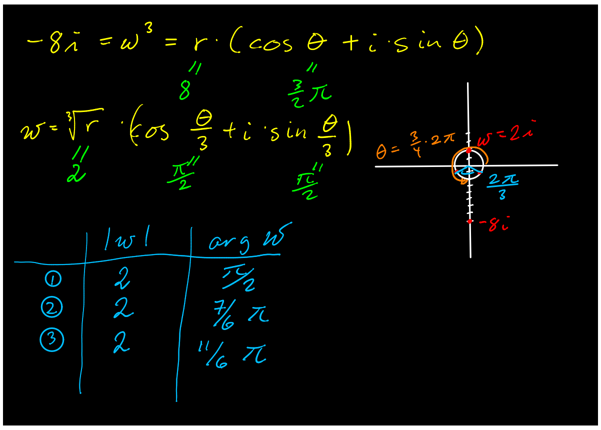
og finn w.

Video: Komplekse funksjonar

Problem 12.2 *Gjeve ein funksjon $f(z)$ over dei komplekse tala. Korleis finn me den deriverte $f'(z)$?*

Video: Den komplekse eksponentialfunksjonen

Problem 12.3 *Kva meiner me med e^{x+iy}? Kan ta potensar med kompleks eksponent?*



Problem 12.4 *Fin dei tre kubikkrøtene til* $-8i$*.*

Oppgåve 12.1 *Løys oppgåve 51, 53 (og 54) i Appendix I i Adams og Essex*

13. Økt 13. Andreordens differentiallikningar

Video:

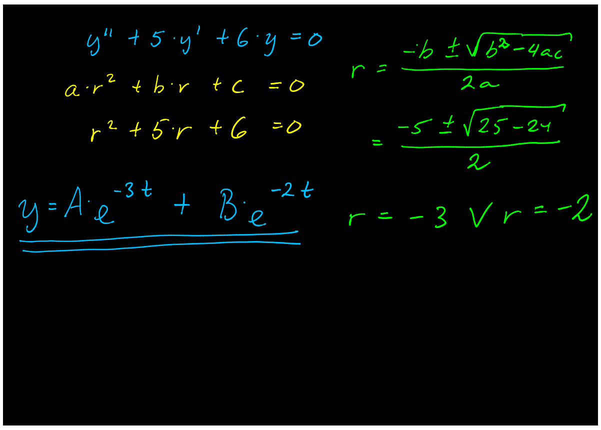
Problem 13.1 *Tenk deg eit lodd som heng i ein fjær frå taket. Når me dreg loddet ut av likevekt, vil det ta til å svinga opp og ned. Korleis kan me finna høgda på loddet som ein funksjon av tida?*

Video:

Problem 13.2 *Løys differentiallikingar*

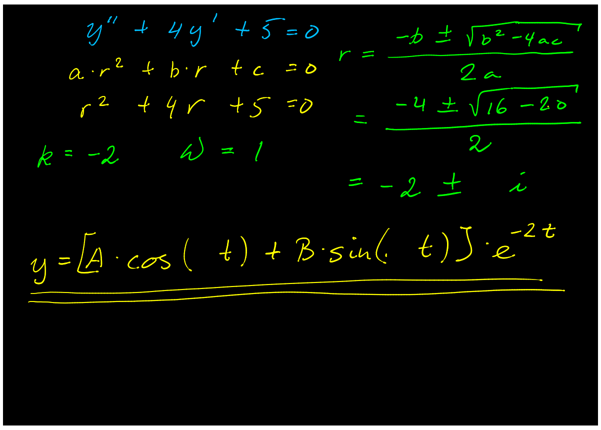
$$ay'' + by' + cy = 0,$$

for vilkårlege verdiar av a*,* b *og* c*.*



Problem 13.3 *Løys differentiallikingar*

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$



Problem 13.4 *Løys differentiallikingar*

$$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Obs! Likninga som vert sett opp i videoen er feil (y manglar i det siste leddet). Likninga over er riktig.

Video:

Problem 13.5 *Tenk deg eit lodd som heng og svinger opp og ned i ein fjær frå taket. Kva skjer dersom loddet heng ned i eit kar med olje som heile tida dempar farta?*

Video: Introduction to harmonic motion

Sjå på ei vekt som ligg på friksjonsfritt underlag og er festa i ei fjær. Dersom vekta er flytta ut frå likevekt vil fjæra verka med ein kraft som dreg vekta tilbake mot likevekt.

Denne videoen frå Khan Academy gjev ei intuitiv løysing på dette problemet, før diff-likningar vert innførde.

Oppgåve 13.1 *Oppgåve 1-15 (odde) frå Adams og Essex kapittel 3.7.*

14. Økt 14. Kopla vekstrater og numerisk likningsløysing

14.1. Kopla vekstrater

Fyrste tema er kopla vekstrater. Her er der ingen ny teori, men for å løysa oppgåvene treng me ein god forståing av grunnleggjande derivasjon.

Video: Kopla vekstrater

Problem 14.1 *Eit fly flyg horisontalt med hastigheit 600 km/h og passerer 5km rett over eit radiofyr.*

Kor raskt aukar avstanden mellom flyet og fyret eitt minutt etter passering?

Oppgåve 14.1 (Adams og Essex ex. 1, side 218) *Finn endringsraten for arealet av eit kvadrat med sidelengd 8 cm, når sidene veks med 2cm/minutt.*

Oppgåve 14.2 *Arealet på eit kvadrat avtek med 2 cm^2/minutt. Kor raskt endrar sidelengda seg når sidene måler 8 cm kvar?*

Oppgåve 14.3 (Adams og Essex ex. 2, side 218) *Arealet på eit kvadrat avtek med 2 kvadratfot/minutt. Kor raskt endrar sidelengda seg når sidene måler 8 fot kvar?*

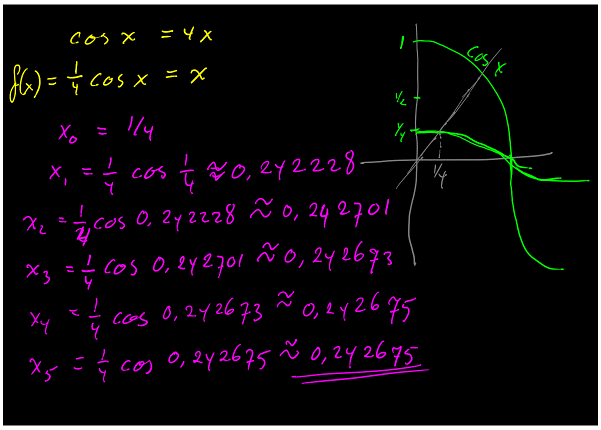
Oppgåve 14.4 *Ei iskule med radius r_1 smeltar slik at volumendringa (per tidseining) er proporsjonal med overflaten på kula. Me skrive k for proporsjonalitetsfaktoren og $k < 0$. Finn eit uttrykk for tida det tek for volumet på kula er halvert.*

Oppgåve 14.5 (Ekstra) *Oppgåve 1 og 3 (og 7,19,25) frå Adams og Essex kapittel 4.1.*

14.2. Numerisk likningsløysing

Video: Røter i likningar

Når me har ei likning $f(x) = 0$ eller $g(x) = x$, og ho er for komplisert til at me kan løysa ho algebraisk, då er det ofte mogleg å bruka ein numerisk metode.



Problem 14.2 *Løys likning $\cos x = 4x$ vha. fikspunktiterasjon.*

Video: Newtons metode

Problem 14.3 *Bruk Newtons metode til å løysa likninga*

$$x^3 - x - 1 = 0$$

med ti desimalplassar korrekte.

Oppgåve 14.6 *Bruk Newtons metode til å løysa oppgåve 1, 3, 5, 7, 11 og 13 frå Adams og Essex kapittel 4.2.*

15. Økt 15. Optimering og funksjonsanalyse

15.1. Forarbeid

Lesestoff til denne økta er Adams og Essex kapittel 4.4–4.8.

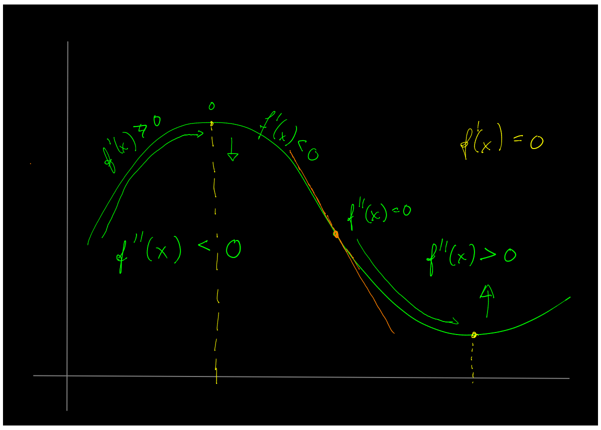
Video: Matematikken i fiskeforvalting

Dette føredraget er brukt tidlegare, for å introdusera optimering frå ein praktisk synsvinkel. Sjå det på nytt dersom du ikkje hugsar tankesette skikkeleg.

Video: Ekstremverdiar

Definisjon 9 *Ein funksjon $f(x)$ har eit lokalt maksimum i punktet x_0 dersom der finst ein konstant $h > 0$ slik at $f(x) \leq f(x_0)$ for alle verdiar av x der $|x - x_0| < h$.*

Ein funksjon $f(x)$ har eit lokalt minimum i punktet x_0 dersom der finst ein konstant $h > 0$ slik at $f(x) \geq f(x_0)$ for alle verdiar av x der $|x - x_0| < h$.

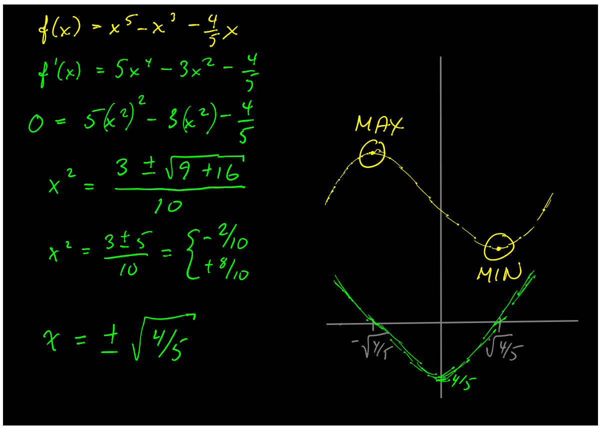


Definisjon 10 *Ein funksjon $f(x)$ er konkav opp på eit ope interval I dersom han er deriverbar på I, og den deriverte $f'(x)$ er ein stigande funksjon i x.*

Tilsvarande er $f(x)$ konkav ned han er deriverbar på I, og den deriverte $f'(x)$ er ein minkande funksjon i x.

Video: Problemløysing

Problem 15.1 *Ta ein sirkel med radius r og ein trapes innskriven i sirkelen (dvs. at alle fire hjørna ligg på sirkelen), slik at grunnlinjen i trapesen er diameteren på sirkelen. Kva høgd skal trapesen ha for at arealet skal vera størst mogleg?*



Analyser funksjonen

$$f(x) = 5x^4 - 3x^2 - \frac{3}{10}.$$

Har funksjonen nokre minimum eller maksimum? Finn evt. ekstremalverdiar.

15.2. Oppgåver

15.2.1. I klassa

Oppgåve 15.1 *Oppgåve 6 frå Adams og Essex kapittel 4.6.*

Me held fram med oppgåver frå kapittel 4.4 og 4.8 i læreboka.

15.2.2. Etterarbeid

Oppgåve 15.2 *Oppgåve 1 og 21 frå Adams og Essex kapittel 4.4.*

Oppgåve 15.3 *Oppgåve 3 (og 19 og 23) frå Adams og Essex kapittel 4.8.*

Oppgåve 15.4 (Ekstra/heimeoppgåve) *Oppgåve 5 frå Adams og Essex kapittel 4.6.*

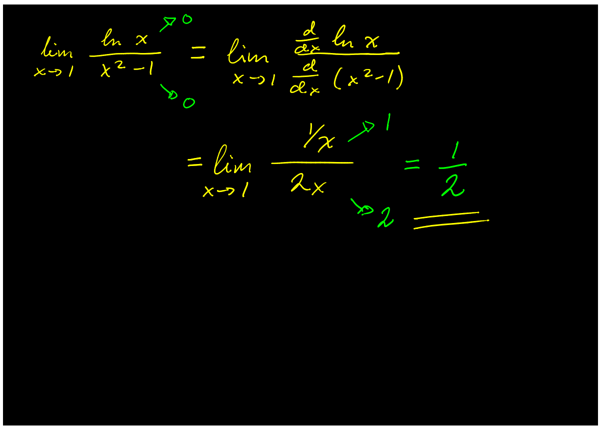
Oppgåve 15.5 (Ekstra) *Oppgåve 4 frå Adams og Essex kapittel 4.7.*

16. Økt 16. Taylor-rekker

Dagens lesestoff er Adams og Essex Kapittel 4.3 og 4.9-4.11.

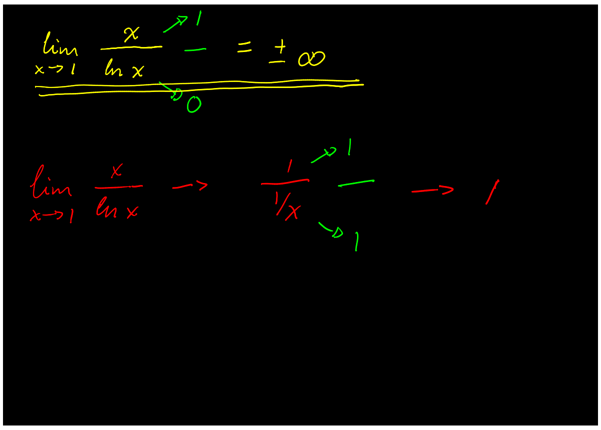
16.1. Ubestemte uttrykk og l'Hôpitals regel

Oppgåve 16.1 *Oppgåve 1-23 (odde) frå Adams og Essex kapittel 4.3.*



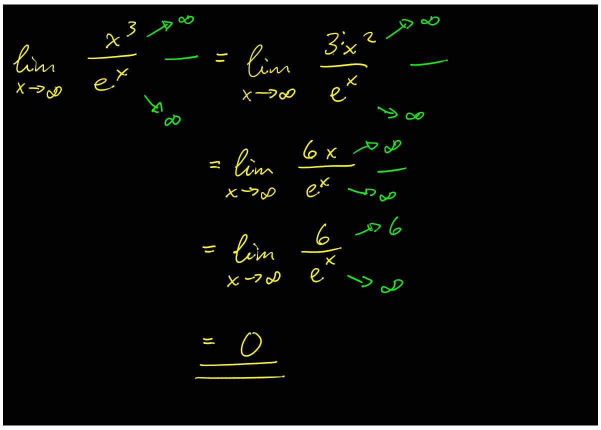
Problem 16.1 *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$



Problem 16.2 *Finn grenseverdien*

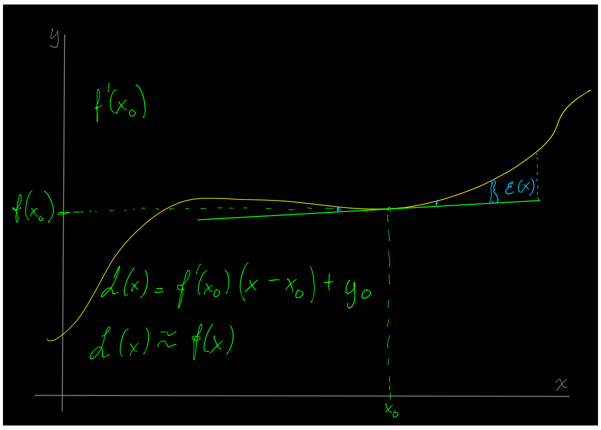
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}.$$



Problem 16.3 *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln x}.$$

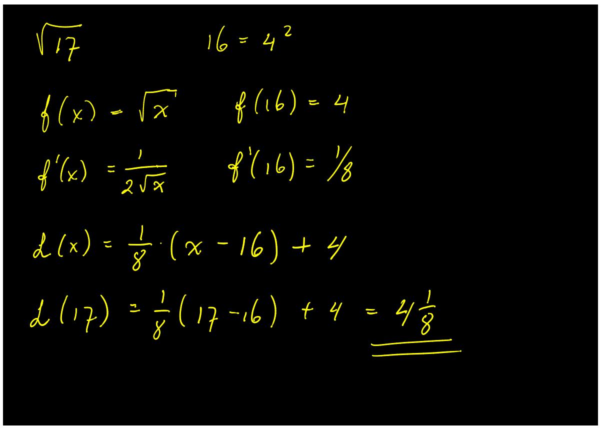
16.2. Lineær approksimering



Definisjon 11 *Lat $f(x)$ vera ein deriverbar funksjon. Lineriseringen (den lineære approksimasjonen) av $f(x)$ rundt eit punkt x_0 er funksjonen*

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Legg merke til at $L(x)$ definerer tangenten til $f(x)$ i x_0.



Problem 16.4 *Bruk lineær approksimasjon for å finna ein tilnærma verdi for* $\sqrt{17}$.

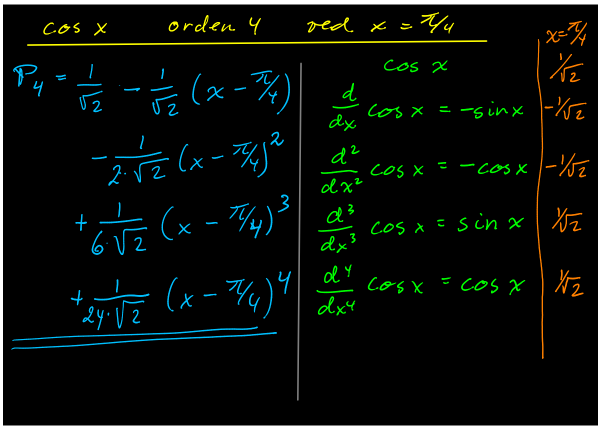
Oppgåve 16.2 *Oppgåve 1 og 7 frå Adams og Essex kapittel 4.9.*

16.3. Taylorrekker

Video:

Definisjon 12 *Lat* $f(x)$ *vera ein funksjon. Taylor-polynomet av* n*te orden åt* $f(x)$ *er definert som*

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f(x_0) &+ \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \\
&+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - a)^2 \\
&+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - a)^3 \\
&+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - a)^n
\end{aligned} \tag{30}
$$



Problem 16.5 *Finn taylorpolynomiet av orden 4 for* $\cos x$ *rundt punktet* $x = \pi/4$.

Oppgåve 16.3 *Oppgåve 1, 3 og 5 (samt 13) frå Adams og Essex kapittel 4.10.*

17. Økt 17. Introduksjon til integrasjon

17.1. Forarbeid

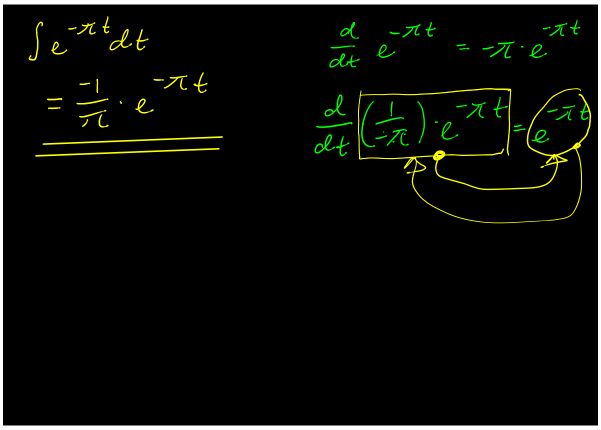
Video: Falldistanse

Problem 17.1 *Sjå for deg ein ball som fall frå stor høgd. Farten er gjeve som $v(t) = 9{,}8t$, der t er tida i sekund sidan ballen vart slept.*

Kor langt fall ballen frå $t = 2$ til $t = 3$? Dvs. kor stor avstand tilbakelegg ballen i løpet av dette intervallet?

Video: Riemannsummer

Korleis definerer me integrasjon?



Problem 17.2 *Finn*

$$\int e^{-\pi t} dt$$

17.2. Oppgåver

Oppgåve 17.1 *Donald køyrer frå Andeby til Gåseby. Stort sett køyrer han i jamn fart. Når han akselerer eller bremser, so er det med konstant aksellerasjon.*

Fyrst bruker han eit halvt minutt på å aksellerera frå 0 km/h til 50 km/h. So køyrer han 5 min. i 50 km/h. Dernest kjem han til bygrensa og bruker eit halvt minutt på å akselerera frå 50 km/h til 80 km/h. Han får køyra 10 min. i 80 km/h, før han må bremsa ned til 60km/h. Det tek 10s. å bremsa ned til 60. Han køyrer 2 min. i 60, før han bruker 20s. på å bremsa ned til 40km/h, som er fartsgrensa det siste stykket. Han køyrer 2 min. i 40, og bruker til slutt eit halvt minutt på å bremsa ned til 0.

Kor langt er det frå Andeby til Gåseby?

(Start med å plotta farta som ein funksjon av tida. Då får du betre oversikt.)

Oppgåve 17.2 *Oppgåve 1-9 (odde), 13, 15, 21, 23, 41 (se ex9) og 43 i Adams og Essex kapittel 5.6.*

18. Økt 18. Obligatorisk øving

NB! Nokre av oppgåvene er henta frå tidlegare eksamen. Eksamen har to delar, der Del I er utan hjelpemiddel, medan Del II er med kalkulator og lærebok (inkl. handskrivne notat i læreboka). Når det står at oppgåva er frå Del I, so treng du altso å læra å løysa ho utan hjelpemiddel.

Oppgåve 18.1 (Frå eksamen, del I, juni 2015) *Finn $P_2(x)$, taylorpolynomet av grad 2 for $f(x) = e^{-x^2}$ med senter i $a = 0$.*

Bruk $P_2(x)$ til å finna ein tilnærma verdi av $f(0{,}2)$.

Kva verdi gjev kalkulatoren din for $f(0{,}2)$.

Oppgåve 18.2 (Frå eksamen, del II, juni 2015) *Kurvene $y = x$ og $y = \cos(2x)$ har eit skjæringspunkt mellom 0 og 1. Finn skjæringspunktet ved Newtons metode i to steg. Set $x_0 = 0{,}5$.*

Oppgåve 18.3 (Frå eksamen, del I, juni 2015) *Løys differentiallikninga*

$$y'' - 6y' + 10y = 0.$$

Oppgåve 18.4 (Frå eksamen, del I, juni 2015) *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx.$$

Oppgåve 18.5 *Finn integralet*

$$\int \frac{\ln t}{t}dt.$$

Oppgåve 18.6 *Finn integralet*

$$\int_1^e \frac{1}{t\ln t}dt.$$

Oppgåve 18.7 *Finn integralet*

$$\int \sin^2(x+1)dx.$$

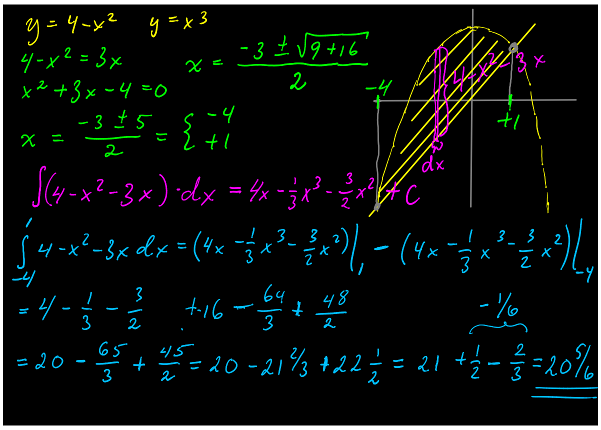
Oppgåve 18.8 *Finn integralet*

$$\int_0^\pi \cos^2(x+1)dx.$$

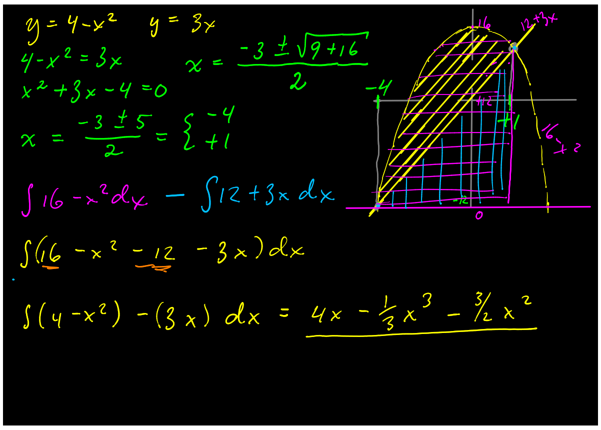
19. Økt 19. Integral som areal

19.1. Forarbeid

Døma nedanfor er laga til Kapittel 5.7 i Adams og Essex. I tillegg må du sjå gjennom stoffet til Økt 17 på nytt.

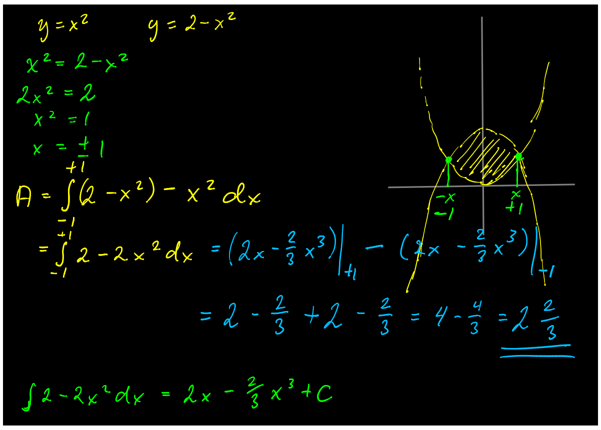


Problem 19.1 *Finn arealet som er avgrensa av dei to kurvene $y = 4 - x^2$ og $y = 3x$.*



Problem 19.2 *Finn arealet som er avgrensa av dei to kurvene $y = 4 - x^2$ og $y = 3x$.*

Dette er same oppgåve som over, men med eit alternativt løysingsresonnement.



Problem 19.3 *Finn arealet som er avgrensa av dei to kurvene $y = 2 - x^2$ og $y = x^2$.*

19.2. I timen

Oppgåve 19.1 *Oppgåve 4-10 (partal), 13, 15, 21, 23, 41 (se ex9) og 43 i Adams og Essex kapittel 5.6.*

Oppgåve 19.2 *Oppgåve 1, 3, 7 (samt 17) i Adams og Essex kapittel 5.7.*

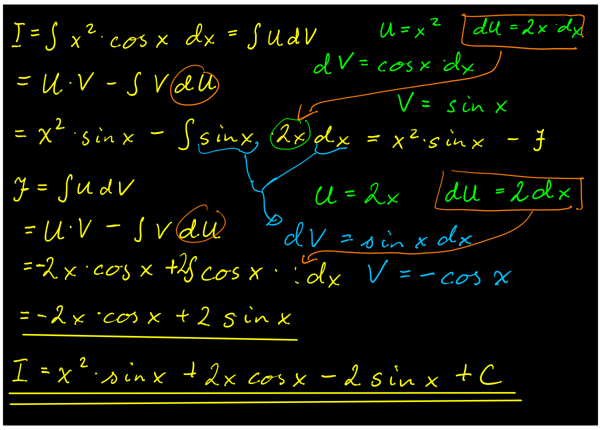
20. Økt 20. Delvis integrasjon

20.1. Forarbeid

Stoffet til denne økta svarer til Kapittel 6.1 i Adams og Essex. **Video**:

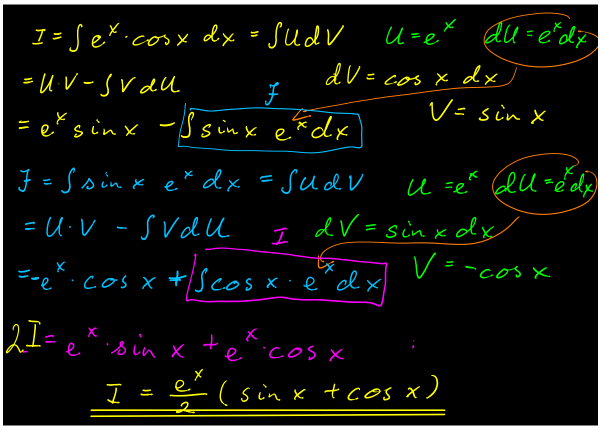
Problem 20.1 *Finn integralet*

$$\int (2x+1)e^{2x}dx =$$



Problem 20.2 *Finn integralet*

$$\int x^2 \cos x dx =$$



Problem 20.3 *Finn integralet*

$$\int e^x \cos x dx =$$

Video:

Problem 20.4 *Skriv*

$$I_n = \int x^n e^{-x} dx.$$

1. *Finn I_4.*
2. *Korleis kan du finna I_8 raskt og effektivt?*

20.2. Oppgåver

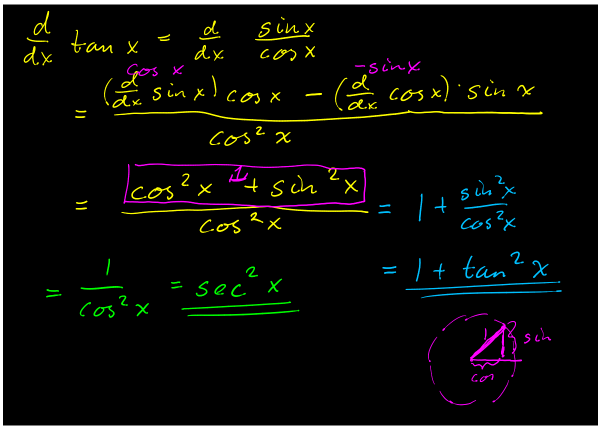
Oppgåve 20.1 *Oppgåve 1-7 (odde) og 17 (samt (9), (21), (31)) i Adams og Essex kapittel 6.1.*

20.3. Løysingsforslag

Oppgåve 20.2 *Finn integralet*

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx$$

For å løysa denne oppgåva med delvis integrasjon so må me kunna derivera $\tan^{=1}$ (som er enklare enn å integrera $\tan^{-1}$). Det igjen, krev at me kan derivera $\tan$. Lat oss starta med desse to delproblema.

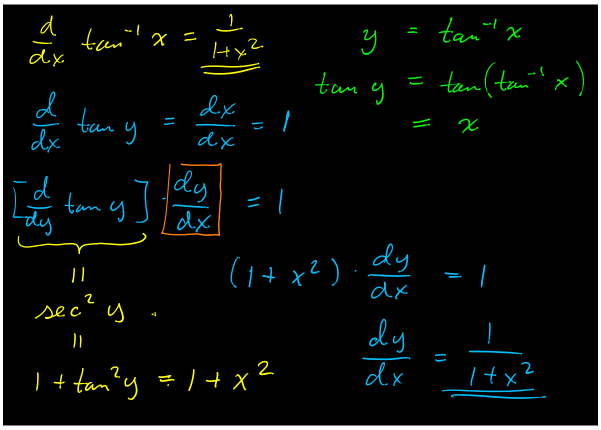


Problem 20.5 *Finn den derivert*

$$\frac{d}{dx}\tan x =$$

Løysinga er

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$



Problem 20.6 *Finn den derivert*

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x =$$

Løysinga er

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

No kan me skriva

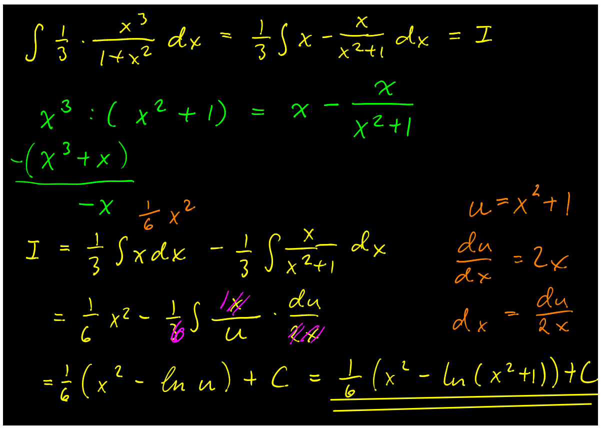
$$U = \tan^{-1} x \Longrightarrow dU = \frac{dx}{1+x^2} \tag{31}$$

$$dV = x^2 dx \qquad \Longrightarrow V = \frac{1}{3}x^3 \tag{32}$$

Desse uttrykka kan me setja inn i integralet for å løysa med delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} \int x^2 \tan^{-1} x dx &= \int U dV \\ &= UV - \int V dU \\ &= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \end{aligned} \tag{33}$$

Det siste integralet kan me studera for seg sjølv.



Problem 20.7 *Finn den integralet*

$$\int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Løysinga er

$$\int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{6}\big(x^2 - \ln(1+x^2)\big)$$

No har me det me treng, og kan setja inn i (34):

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \tan^{-1} x dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6}\big(x^2 - \ln(1+x^2)\big) \\
&= \frac{1}{6}\big(2x^3 \tan^{-1} x - x^2 + \ln(1+x^2)\big)
\end{aligned} \tag{34}
$$

21. Økt 21. Rasjonale funksjonar

21.1. Forarbeid

Stoffet til denne økta svarer til Kapittel 6.2 i Adams og Essex. **Video**:

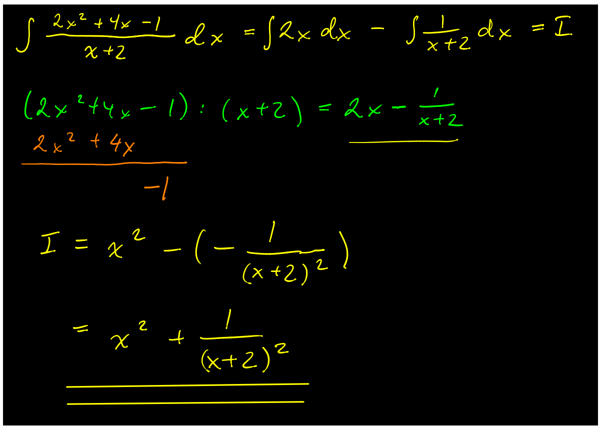
Problem 21.1 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{1}{x+a} dx =$$

Oppgåve 21.1 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{1}{x-a} dx =$$

Samanlikn løysinga med problemet over (dømet).



Problem 21.2 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{4x^2+2x-1}{x+2} dx =$$

Video:

Problem 21.3 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \tag{35}$$

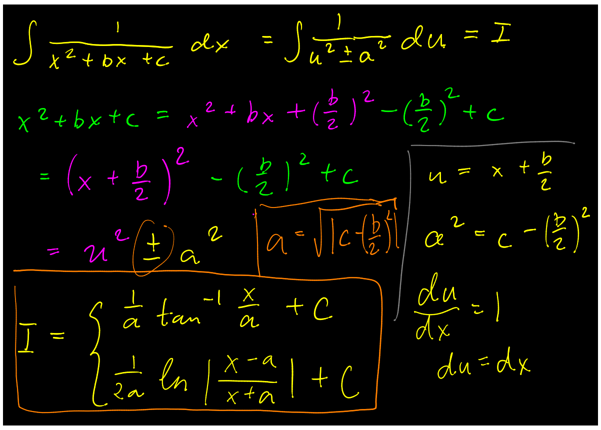
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \tag{36}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \tag{37}$$

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \tag{38}$$

Oppgåve 21.2 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{x}{x^2-a^2}dx =$$



Problem 21.4 *Finn fylgjande integral*

$$\int \frac{1}{x^2+bx+a}dx =$$

21.2. Oppgåver

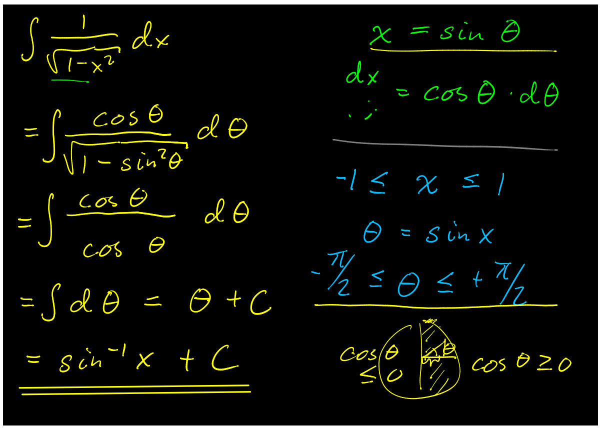
Oppgåve 21.3 (I timen) *Oppgåve 2, 4 og 6 frå Kapittel 6.2 i Adams og Essex.*

Oppgåve 21.4 (I timen) *Oppgåve 20 frå Kapittel 6.2 i Adams og Essex.*

Oppgåve 21.5 (Heimearbeid – Fasit i læreboka) *Oppgåve 1, (3), 5, 9 (poly.div), 11, (21) og (23) frå Kapittel 6.2 i Adams og Essex.*

22. Økt 22. Invers substitusjon

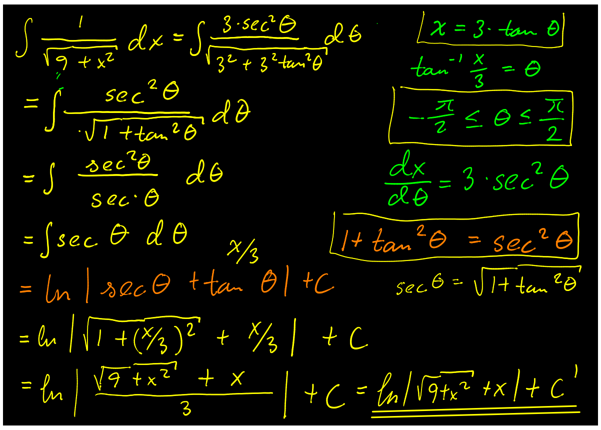
Invers substitusjon er forklart i Kapittel 6.3 i Adams og Essex.



Problem 22.1 *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Oppgåva kan løysast på fleire ulike måtar, men her er me interessert i *invers substitusjon* som prinsipp.



Problem 22.2 *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx =$$

Oppgåve 22.1 *Som eit alternativ til* tan *i dømet over, can ein bruka* sinh. *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx =$$

ved hjelp substitusjonen $x = a \sinh u$.

Du treng fylgjande formlar

$$\sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u \tag{39}$$

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \tag{40}$$

$$\frac{d}{du}\sinh u = \cosh u \tag{41}$$

Oppgåve 22.2 *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}dx =$$

Her kan du prøva med substitusjonen $x = a\sec\theta$.

Du må tenkja gjennom fylgjande spørsmål på vegen. Forøvrig kan du fylgja mynsteret i døma over.

1. *Finn $dx/d\theta$.*
2. *Kva verdi vel du for a?*
3. *Korleis kan du forenkla $\sec^2\theta - 1$?*

Video: Invers substitusjon med $\tan\theta/2$

Problem 22.3 *Finn integralet*

$$\int \frac{1}{1 + sin\theta + \cos\theta}d\theta =$$

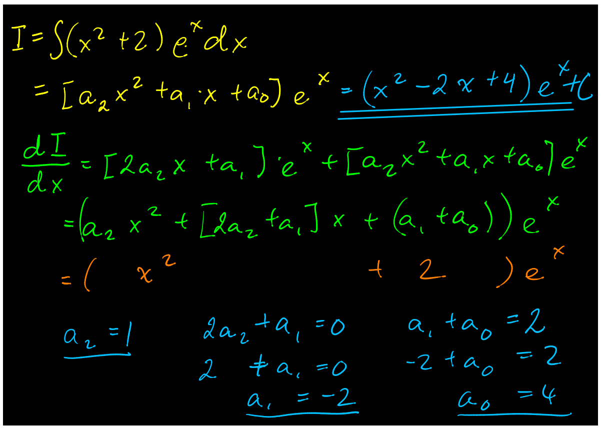
Oppgåve 22.3 *Oppgåve 9 i Kapittel 6.1 i Adams og Essex.*

Oppgåve 22.4 *Oppgåve (1), 3, 5 (se formelsamling), 7, (9) i Kapittel 6.3 i Adams og Essex.*

Oppgåve 22.5 *Gå gjennom læreboka (Kapittel 6.3 Adams og Essex) og lag di eiga «formelsamling» over inverse substitusjonar. For kvar substitusjon (*sin, sec, cosh *osv.) skriv du ned kva integrandformar der substitusjonen er egna.*

23. Økt 23. Trapesmetoden

Adams og Essex forklarer metodane til denne økta i kapittel 6.4 og 6.6.



Problem 23.1 *Finn integralet*

$$\int (x^2 + 2)dx =$$

Vi skal bruke ubestemte koeffisienters metode.

Video: Trapesmetoden

Me er interessert i eit integral $\int_a^b f(x)dx$ som me ikkje klarer å finna analytisk. Korleis kan me finna ein numerisk approksimasjon? Me føreset at me kan rekna ut $f(x)$ for nokre (tilrekkeleg mange) verdiar av x.

Video: Feilskranke for Trapesmetoden

Sats 8 *Sjå på eit integral $\int_a^b f(x)dx$ og lat T_n vera tilnærminga ved trapesmetoden med n like breide interval. Dersom $f(x)$ er to gongar deriverbar i heile intervallet (a, b), slik at $|f''(x)| \le K$, so er approksimeringsfeilen avgrensa ved*

$$|\int_a^b f(x)dx - Tn| \le \frac{K(a-b)}{12n^2}$$

Oppgåve 23.1 *Oppgåve 3 (kutt T16 og M8), 5, 7. i Kapittel 6.6 i Adams og Essex.*

24. Økt 24. Obligatorisk øving

Oppgåve 24.1 (Eksamen juni 2016, Del I) *Finn integralet*

$$\int (2x + 1)\cos(3x)dx =$$

Oppgåve 24.2 (Eksamen juni 2016, Del I) *Finn integralet*

$$\int \frac{6x + 1}{2x^2 - x - 3} dx =$$

Oppgåve 24.3 (Eksamen juni 2016, Del I) *Finn integralet*

$$\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx =$$

Oppgåve 24.4 *Sjå på kurvene $y = \cos x$ og $y = 3/4 - x/4$. Dei to kurvene krysser to gongar i intervallet $(0, 2\pi)$. Finn arealet avgrensa av dei to kurvane mellom desse to skjæringspunkta.*

Oppgåve 24.5 *Finn integralet*

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}} dx =$$

Oppgåve 24.6 (Variant av Eksamen juni 2012, Del II) *Ei øy er 500 meter lang. Me måler breidda av øya normalt på lengderetninga for kvar 50de meter. Resultatet er vist i tabellen under:*

Lengd	*Breidd*
0	0
50	23
100	49
150	102
200	95
250	114
300	87
350	54
400	27
450	14
500	0

Bruk trapesmetoden til å finna ein tilnærma verdi for flateinnhaldet på øya.

Siste oppåve er ein variasjon av oppåve 5 frå eksamen juni 2012, Del II, der ein skulle bruka Simpsons metode i staden for trapesmetoden.

25. Økt 25. Simpsons metode

25.1. Forarbeid

Video: Simpsons metode

Definisjon 13 *Simpsons metoDe approksimerer eit integral $\int_a^b f(x)dx$ ved uttrykket*

$$S_{2n} = \frac{h}{3} \cdot \left[\sum_{i=0,2n} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right],$$

der $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ deler intervallet (a, b) i n (n er eit partal) like store delinterval med breidd h.

Video: Simpsons feilskranke

Sats 9 *Approksimeringsfeilen ved Simpsons metode er avgrensa som*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_{2n} \right| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4 = \frac{K(b-a)}{180 n^4},$$

where $h = (b-a)/n$.

Video: Spenning i ein kondensator

Problem 25.1 *Spenninga over ein kondensator (med kapasitans 1) er gjeve som integralet*

$$v(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau.$$

(Spenninga på tidspunkt $t = 0$ *var då* $v(0) = 0$.*)*

Me har straummålingar for kvart sekund over ein periode på 10s.

τ	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$i(\tau)$	*0*	0,8	1,2	1,4	1,5	1,2	1,8	2,0	1,5	1,8	2,2

Approksimer spenninga $v(10)$ *over kondensatoren etter 10s., vha. Simpsons metode.*

25.2. Fyrste time (Simpsons metode)

Oppgåve 25.1 *Oppgåve 1, 3, 5, 6. i Kapittel 6.7 i Adams og Essex.*

25.3. Andre time (Integralrekning)

Me skal løysa fylgjande to oppgåver steg for steg, og bruka ein quiz for kvart steg.

Oppgåve 25.2 *Løys integralet*

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Oppgåve 25.3 (Adams og Essex oppg. 12 kap. 6.2) *Løys integralet*

$$\int \frac{1}{x^3+9x} dx.$$

Fyrste quiz-sprørsmål på kvart problem er: *Kva metode vil du bruka i fyrste steg?*

- A. Substitusjon;
- B. Delvis integrasjon;
- C. Invers substitusjon;
- D. Delbrøkoppspalting;
- E. Sum av to integral.

26. Økt 26. Volumrekning

Eit rotasjonslegeme er eit 3D-objekt som er definert ved å ta ein 2D-figur og rotera han rundt ei akse i rommet.

Video: Rotasjons-legeme
Video: Volum
Video: Hule røyr

Korleis finn me volumet av eit rotasjonslegeme? Ta t.d. ein kjegla som er definert ved å rotera kurva $y = \frac{25}{35} \cdot x$ ($z = 0, 0 \leq x \leq 35$) rundt x-aksa.

Ta funksjonen

$$f(x) = 6(\sin x + 3)$$

og arealet mellom kurven til $f(x)$ og x-aksa (i planet $z = 0$). Me roterer dette arealet rundt y-aksen for å få eit rotasjonslegeme.

Korleis kan me rekna ut arealet til dette rotasjonslegement?

Oppgåve 26.1 *Ei kjegle K har høgd $h = 10$ og radien i grunnflata er 2. Kva er volumet V av K?*

Korleis kjem ein fram til svaret?

Oppgåve 26.2 (Basert på oppg. 1 i Adams og Essex kap. 7.1) *Ei flate A er avgrensa av dei tre likningane $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$. Me definerer eit rotasjonslegeme R ved å rotera A rundt x-aksa.*

1. *Kva slags figur er A? (Beskriv figuren med ord.)*
2. *Kva slags figur er R? (Beskriv figuren med ord.)*
3. *Kva metode bør ein bruka for å finna volumet på R?*
4. *Rekn ut volumet på R.*

Oppgåve 26.3 *Ein pyramide P har høgd $h = 5$ og grunnflata er eit kvadrat med sider $s = 2$. Kva er volumet V av P?*

Korleis kjem ein fram til svaret?

Oppgåve 26.4 *Oppgåve 1-5 (alle) i Kapittel 7.1 i Adams og Essex. Bruk berre den metoden som er fornuftig – ikkje begge.*

27. Økt 27. Kurver og overflater

Sjå på kurven til ein deriverbar funksjon $f(x)$. Kva er lengda på denne kurva over intervallet $[a, b]$?

Video: Lengda på ei kurve
Video: Overflater

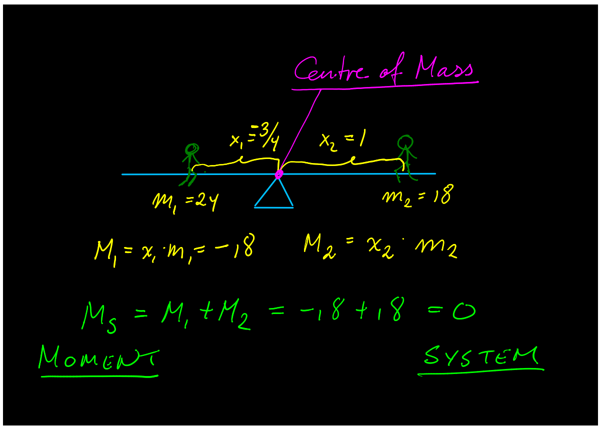
Me tek kurven til ein deriverbar funksjon $f(x)$ på eit intervall $[a, b]$ og roterer han rundt x-aksen. Kva er arealet av overflata på rotasjonslegemet som me då får?

Oppgåve 27.1 (Ekstra) *Oppgåve 27 i Kapittel 7.1 i Adams og Essex.*

Oppgåve 27.2 *Oppgåve 1, (11) i Kapittel 7.2 i Adams og Essex.*

Oppgåve 27.3 *Oppgåve 1, 3, 7 (se ex2), (5 - del i to biter), 20, 21, 23 og ((25 - trig subst.)) i Kapittel 7.3 i Adams og Essex.*

28. Økt 28. Masse og moment



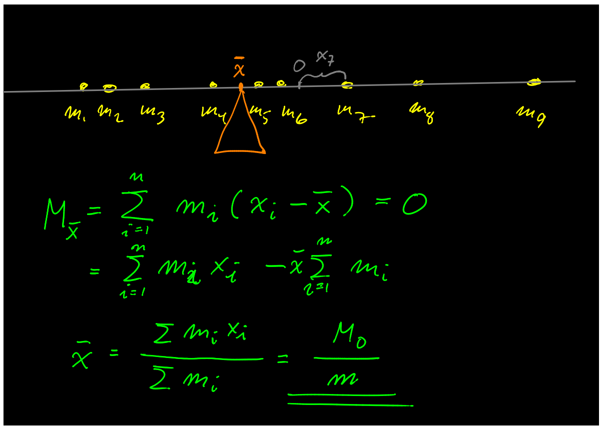
Definisjon 14 *Ta ei masse (eit legeme) E som ligg på x-aksen.* Momentet *åt E omkring eit punkt x_0 på x-aksen er produktet $M = m \cdot (x - x_0)$ der x posisjonen og m er massa åt E.*

Definisjon 15 *Ta eit system av masser $E_1, E_2, \ldots, E_n$ som med posisjonar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ på x-aksen og masser $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (henhaldsvis).* Momentet *åt systemet omkring eit punkt x_0, er summen av momentane for kvar einskild masse. Dvs.*

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_0)$$

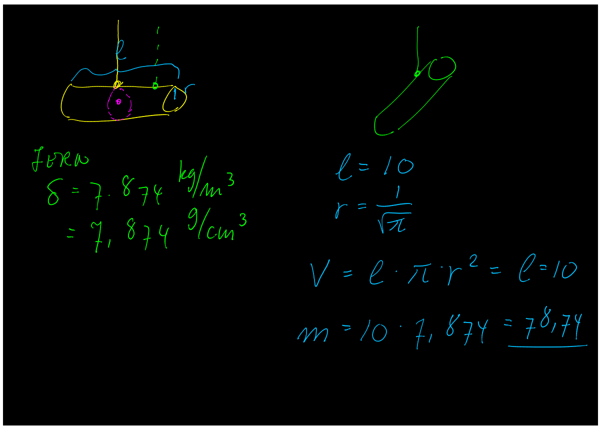
Definisjon 16 *Massesenteret for eit system av masser er det punktet x_0 slik at momentet åt systemet om x_0 er lik 0.*

Oppgåve 28.1 *Per og Kari sit på kvar si ende av si ende av ei vippedisse. Per veg 20 kg. og sit heilt på enda to meter frå midten (vippepunktet). Kari veg 25 kg. Kor langt frå midten skal ho plassera seg for at dissa skal vera i balanse? (Dvs. leggja massesenteret på vippepunktet.)*

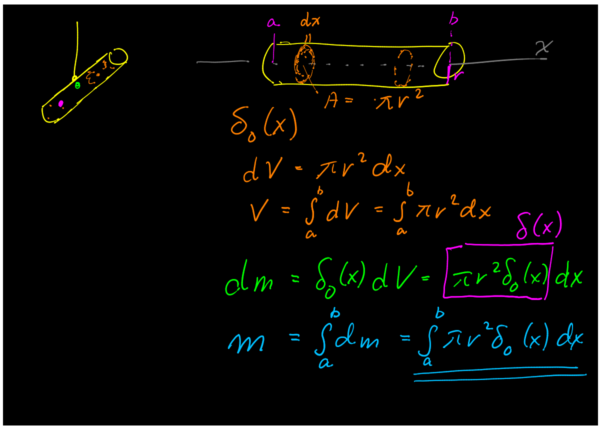


Problem 28.1 *Ta eit system av masser $E_1, E_2, \ldots, E_n$ som med posisjonar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ på x-aksen og masser $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (henhaldsvis).*

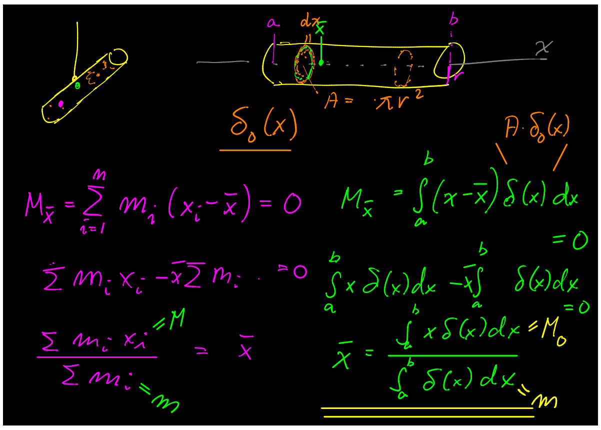
Finn massesenteret for systemet?



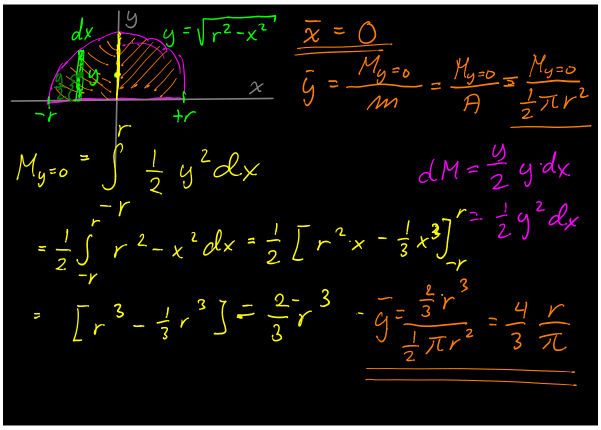
Kva meiner me med massetettheit?



Tenk deg ein sylinder som er resultatet av å rotera eit kvadrat rundt x-aksen. Sett at massetettheita varierer som ein funksjon av x. Korleis kan me rekna ut massa til heile sylinderen?



Tenk deg ein sylinder som er resultatet av å rotera eit kvadrat rundt x-aksen. Sett at massetettheita varierer som ein funksjon av x. Korleis kan me finna massesenteret i ein slik sylinder?



Problem 28.2 *Tenk deg ei halvsirkelforma metallplate. Du skal borra eit hol i plata slik at du kan henga ho på ein spiker, slik at ho heng i ro utan å snurra, uansett kva vinkel ho heng i.*

Du kan gå ut frå at massetettheita og tykkelsen er den same i heile metallplata.

Oppgåve 28.2 *Tenk deg ein trekanta metallplate. Du skal borra eit hol i trekanten slik at du kan henga han på ein spiker, slik at han heng i ro utan å snurra, uansett kva vinkel han heng i.*

Du kan gå ut frå at massetettheita og tykkelsen er den same i heile metallplata.

Oppgåve 28.3 *Oppgåve 1, 3 (bruk $m = \ln(\sqrt{2} + 1)$), 13, 23 i Kapittel 7.5 i Adams og Essex.*

29. Økt 29. Lineære likningsystem

Video: Liknings-system

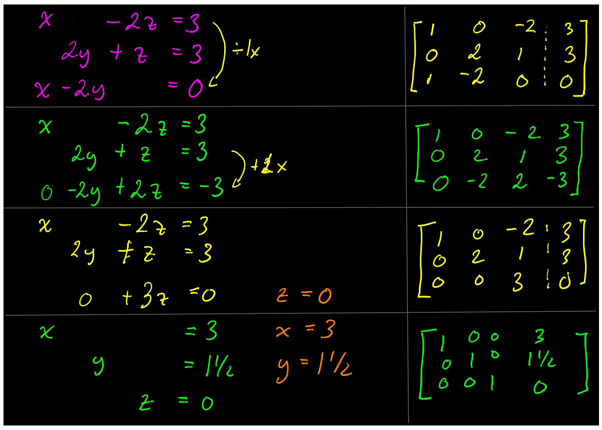
Ei lineær likning definerer eit hyperplan i rommet; med to ukjende definer ho ei line i planet (2D), og med tre ukjende definerer ho eit plan i rommet (3D).

Eit system av likningar definerer fleire slike hyperplan, og løysingsrommet (mengda av alle gyldige løysingar) er punktene der desse hyperplana kryssar (snittet).

Video: Eksistens og unikheit

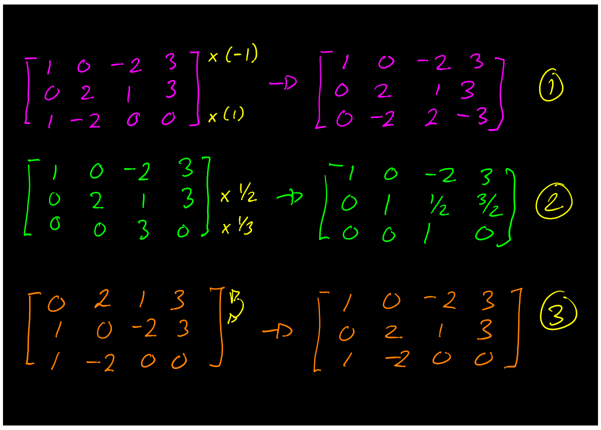
Eit lineært likningssystem kan ha anten

1. éi løysing,
2. inga løysing, eller
3. uendeleg mange løysingar.



Problem 29.1 *Løys likningsystemet:*

$$x - 2z = 3$$
$$2y + z = 3$$
$$x - 2y = 0$$



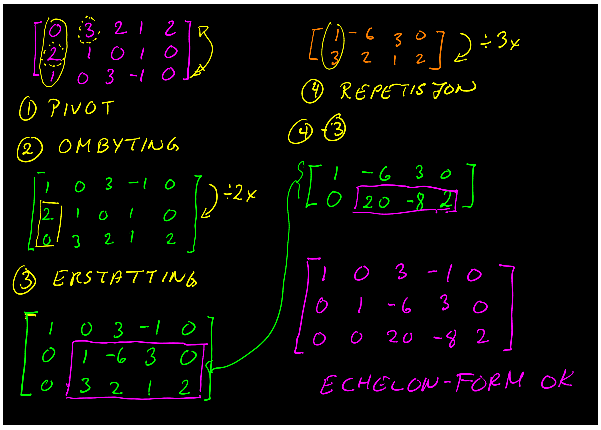
Der er tre grunnleggjande rekkjeoperasjonar på ei matrise:

1. Byta ei rekkje med summen av seg sjølv og eit multiplum av ei anna rekkje.
2. Byta om to rekkjer.
3. Multiplisera alle tala i ei rekkje med ein konstant (ulik null).

Når me bruker desse rekkjeoperasjonane på matrisa som svarer til eit likningssystem (den utvida matrisa/*augmented matrix*) so får me matrisa til eit likningssystem med same løysingsmengd.

Definisjon 17 (Lay side 29) *Ei matrise er på echelon-form dersom:*

1. *Alle null-rekkjer er samla nedst i matrisa.*
2. *Alle leiande koeffisientar (dvs. koeffisienten* ulik null *som er lengst til venstre i rekkja) ligg lenger til venstre enn leiande koeffisientar i rekkjene under.*
3. *Alle koeffisientar i søylen under ein leiande koeffisient er lik null.*



Problem 29.2 *Bruk grunnleggjande rekkjeoperasjonar til å få fylgjande matrise på echelon-form:*

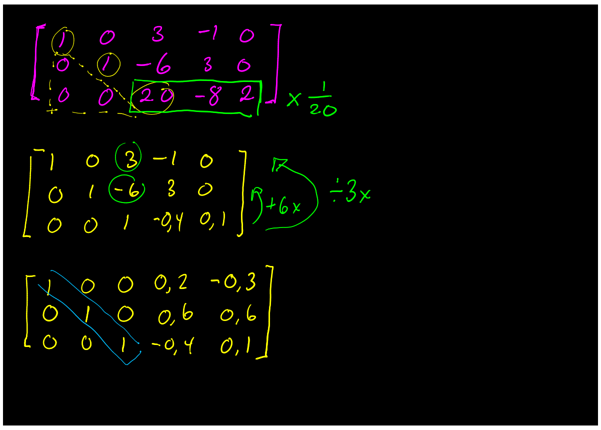
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgåve 29.1 *Bruk grunnleggjande rekkjeoperasjonar til å få fylgjande matrise på echelon-form:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisjon 18 (Lay side 29) *Ei matrise er på redusert echelon-form dersom ho er på echelon-form og i tillegg tilfredsstiller:*

1. *Alle leiande koeffisientar er lik éin.*
2. *Alle leiande koeffisientar er den einaste koeffisienten ulik null i si søyle.*



Problem 29.3 *Bruk grunnleggjande rekkjeoperasjonar til å få fylgjande matrise på redusert echelon-form:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgåve 29.2 *Bruk grunnleggjande rekkjeoperasjonar til å få fylgjande matrise på redusert echelon-form:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgåve 29.3 *Oppgåve 1, 3, (17) i Kapittel 1.1 i Lay.*

Oppgåve 29.4 *Oppgåve 13 i Kapittel 1.1 i Lay.*

Oppgåve 29.5 *Oppgåve 1-11 (odde), (13) og (15). i Kapittel 1.2 i Lay.*

30. Økt 30. Obligatorisk øving

Oppgåve 30.1 (Eksamen, Del I, desember 2015) *Finn alle løysingane i likningssystemet ved gausseliminasjon*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad & +3x_3 = -4 \\ 4x_1 - 3x_2 \quad & +8x_3 = -9 \\ -x_1 + x_2 \quad & -2x_3 = 2 \end{aligned}$$

Oppgåve 30.2 (Eksamen, Del II, juni 2012) *Grafane til funksjonen $f(x) = x^2$ og $g(x) = 3x - 2x^2$ avgrenser eit flatestykke F med areal A.*

Finn arealet A.

Oppgåve 30.3 (Eksamen, Del II, juni 2012) *Finn tyngdepunktet i flatestykket F som definert i oppgåva over.*

Oppgåve 30.4 (Eksamen, Del II, juni 2012) *Flatestykke F er definert som i oppgåva over.*

Finn volumet av det romlegement som kjem fram når flatestykket F roterer ein gong om y-aksa.

Oppgåve 30.5 (Eksamen, Del II, desember 2015) *Set opp integralet for lengda s på kurva $f(x) = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$.*

Bruk Simpsons metode for å finna tilnærminga S_4 til lengda s.

Oppgåve 30.6 (Eksamen, Del I, juni 2016) *Finn alle løysingane i likningssystemet ved gausseliminasjon*

$$\begin{aligned}
-x_1 - x_2 \qquad & - 3x_4 && = 5 \\
x_1 \qquad & -2x_3 + 2x_4 && = -2 \\
x_2 \qquad & +2x_3 + x_4 && = -3
\end{aligned}$$

31. Økt 31. Vektorrekning

Video: Vektorar i to dimensjonar

Definisjon 19 *Ein (reell) vektor i to dimensjonar er eit par av reelle tal. Me skriv*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Video: Vektorar i fleire dimensjonar

Definisjon 20 *Ein (reell) vektor i er ein tuppel (serie) reelle tal. Me skriv*

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

for ein n-dimensjonal vektor.

Video: Rommet utspent av fleire vektorar

Definisjon 21 *Spennet av ein vektor er*

$$\mathsf{span}\{\vec{x}\} = \{c\vec{x} | c \in \mathbb{R}\}$$

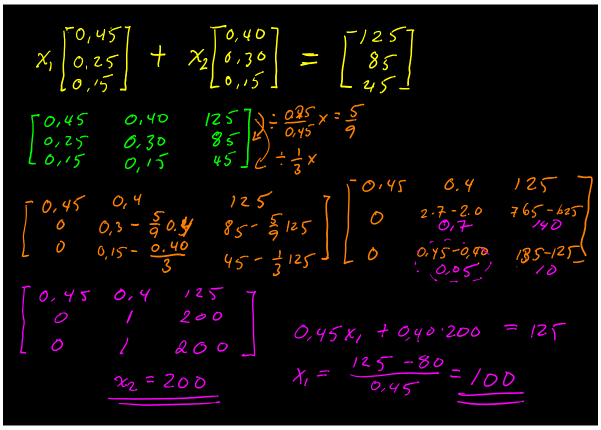
Spennet av to vektorar er

$$\mathsf{span}\{\vec{x}, \vec{y}\} = \{c_1\vec{x} + c_2\vec{y} | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Video: Einingskostnad

Ei bedrift produserer to produkt, A og B. Kostnaden for å produsera A, per krone i salsverdi, er 45 øre i materialar, 25 øre i arbeid (personalkostnad), og 15 øre i indirekte kostnader (*overhead*). Tilsvarande for produkt A er 40 øre i materialar, 30 øre i arbeid og 15 øre i indirekte kostnader.

Den totale kostnaden ved å produsera ei viss mengd av kvar vare kan me sjå som ein lineær kombinasjon av to vektorar som gjev einingskostnadene. Me viser kva me meiner med det.



Problem 31.1 *Ei bedrift produserer to produkt, A og B. Kostnaden for å produsera A, per krone i salsverdi, er 45 øre i materialar, 25 øre i arbeid (personalkostnad), og 15 øre i indirekte kostnader (*overhead*). Tilsvarande for produkt A er 40 øre i materialar, 30 øre i arbeid og 15 øre i indirekte kostnader.*

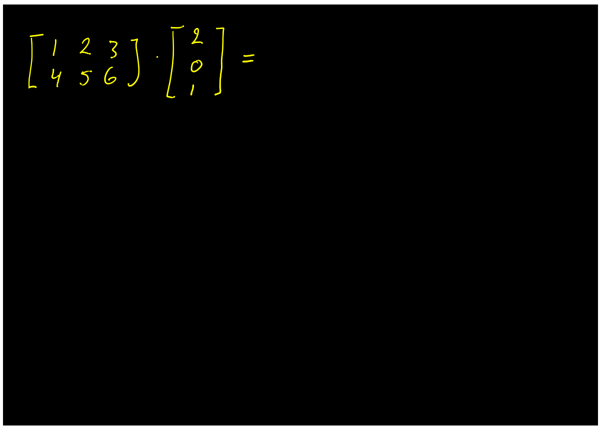
Sett at ressursane som er tilgjengeleg per dag er $125\$$ *i materialar,* $85\$$ *i arbeid og* $45\$$ *til indirekte kostnader. Kor mykje skal bedrifta produsera av kvart produkt for å utnytta alle ressursane fullt ut?*

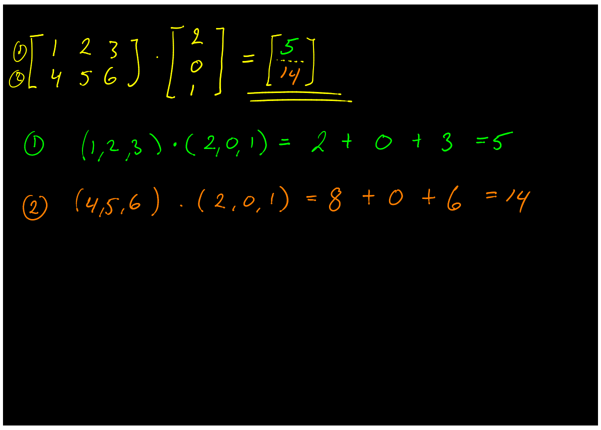
Oppgåve 31.1 *Oppgåve 1-13(odde) i Kapittel 1.3 i Lay.*

32. Økt 32. Matriserekning

32.1. Matriselikningar

Video: Fire måtar å skriva eit likningssystem

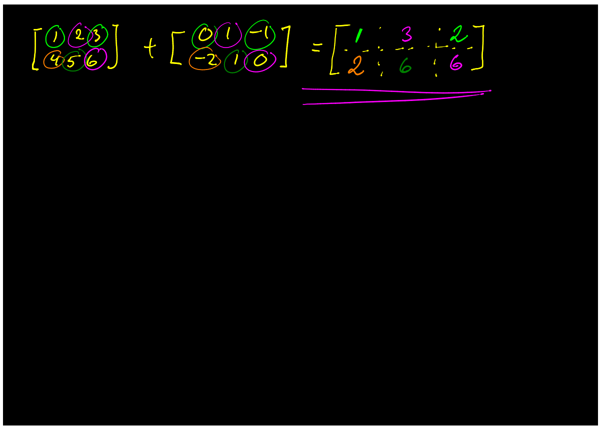




Problem 32.1 *Rekn ut produktet*

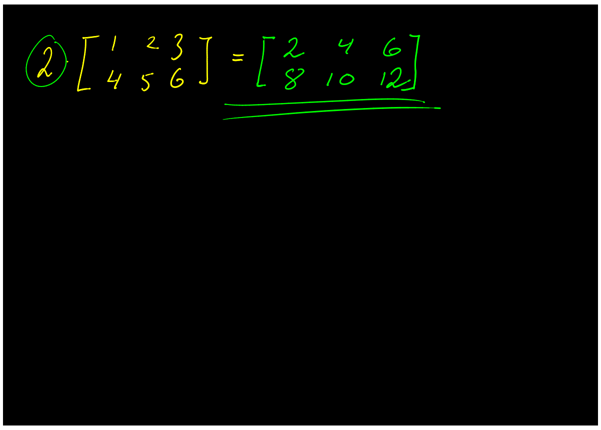
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \tag{42}$$

Me gjev to løysingsteknikkar.



Problem 32.2 *Rekn ut summen*

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}= \tag{43}$$



Problem 32.3 *Rekn ut skalarproduktet*

$$2\cdot\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}= \tag{44}$$

Oppgåve 32.1 *Skriv*

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\\-2&1\end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \tag{46}$$

$$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{47}$$

Rekn ut fylgjande

1. $A(\vec{u} + \vec{v}) =$

2. $A\vec{u} + A\vec{v} =$

Samanlikna dei to svara. Kva ser du? Kan du seia noko generelt om samanhengen mellom $A(\vec{u} + \vec{v})$ *og* $A\vec{u} + A\vec{v}$ *for vilkårlege verdiar av* A, $\vec{u}$ *og* $\vec{v}$*?*

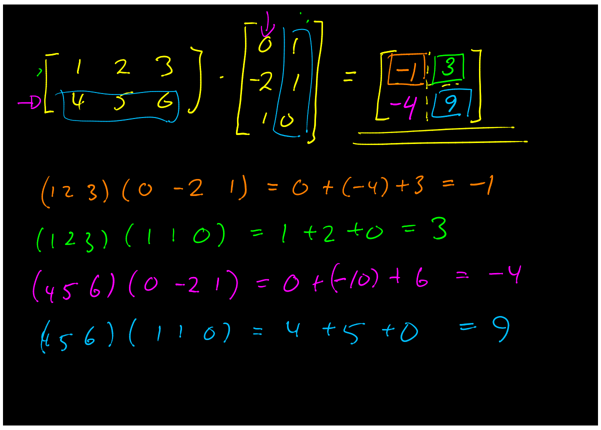
Oppgåve 32.2 *Lat* A *og* $\vec{u}$ *vera som i oppgåva over. Rekn ut fylgjande*

1. $A(c\vec{u}) =$

2. $c(A\vec{u}) =$

Samanlikna dei to svara. Kva ser du? Kan du seia noko generelt om samanhengen mellom $A(c\vec{u})$ *og* $c(A\vec{u})$ *for vilkårlege verdiar av* A *og* $\vec{u}$*?*

32.2. Matrisearitmetikk



Problem 32.4 *Rekn ut produktet*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \tag{48}$$

I dei neste oppgåvene bruker me fylgjande matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Oppgåve 32.3 *Rekn ut og samanlikna fylgjande:*

1. $AB =$

2. $BA =$

Kan du seia noko generelt om samanhengen for vilkårlege verdiar av A og B?

Oppgåve 32.4 *Rekn ut og samanlikna fylgjande:*

1. $A(BC) =$

2. $(AB)C =$

Kan du seia noko generelt om samanhengen for vilkårlege verdiar av A, B og C?

Oppgåve 32.5 *Rekn ut og samanlikna fylgjande:*

1. $A(B + C) =$

2. $AB + AC =$

Kan du seia noko generelt om samanhengen for vilkårlege verdiar av A, B og C?

Oppgåve 32.6 *Rekn ut og samanlikna fylgjande:*

1. $(A + B)C =$

2. $AC + BC =$

Kan du seia noko generelt om samanhengen for vilkårlege verdiar av A, B og C?

Oppgåve 32.7 *Lat $c = 2$ Rekn ut og samanlikna fylgjande:*

1. $2(AB) =$

2. $(2A)B =$

3. $A(2B) =$

Kan du seia noko generelt om samanhengen for vilkårlege verdiar av A, B, C og c?

Oppgåve 32.8 *Skriv*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Rekn ut

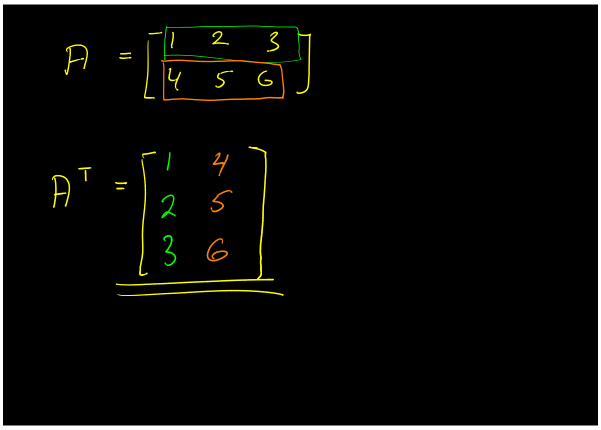
1. $IB =$

2. $BI =$

3. $IA =$

4. $AI =$

Samanlikn svara. Kva kan du seia om CI og IC utan å rekna?



Problem 32.5 *Lat*

(53) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn den transponerte matrisa A^{T}.

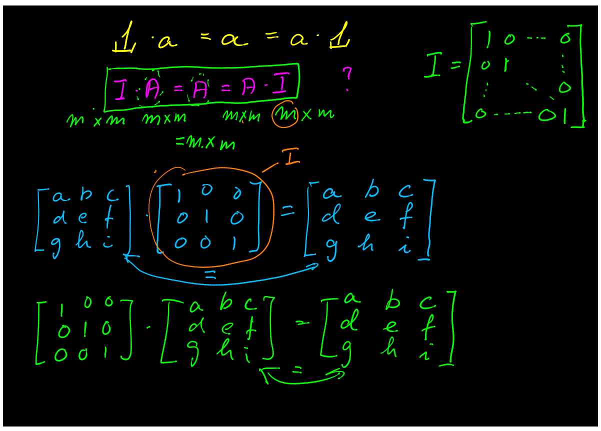
32.3. Vidare øving

Oppgåve 32.9 *Oppgåve 1-13(odde) i Kapittel 1.4 i Lay.*

Oppgåve 32.10 *Oppgåve 1, 2, 3, 7, 9, 10 og 11 i Kapittel 2.1 i Lay.*

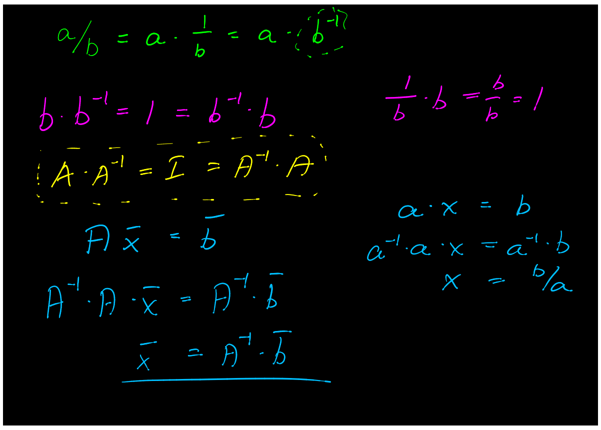
Oppgåve 32.11 *Oppgåve 27, (28) i Kapittel 2.1 i Lay.*

33. Økt 33. Den inverse matrisa



Problem 33.1 *Når me arbeider med multiplikasjon er me vande til å ha eit* nøytralt *element. I talsystem er det 1, som har den eigenskapen at $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for alle a.*

Finst der ein matrise I som er nøytralt med omsyn til matrisemultiplikasjon? Dvs. $A \cdot I = I \cdot A = A$.

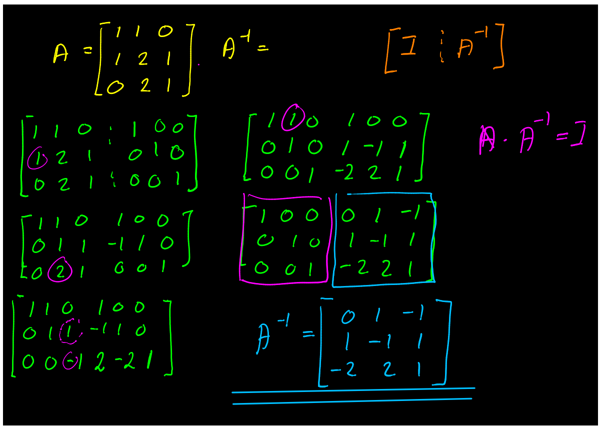


Problem 33.2 *Reelle tal kan dividerast:*

$$a/b = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Divisjon er eit særtilfelle av multiplikasjon, der b^{-1} har den eigenskapen at $b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1$.

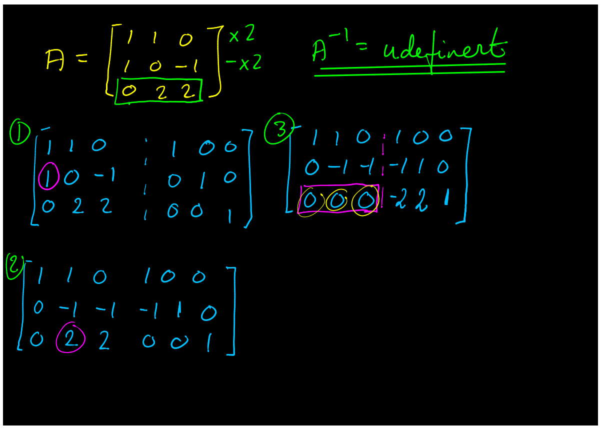
Kan me gjera noko liknande med matriser? For ei matrise A, finst der ein matrise A^{-1} slik at $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$.



Problem 33.3 *Lat*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn A^{-1}.



Problem 33.4 *Lat*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn A^{-1}.

Oppgåve 33.1 *Oppgåve 1-7 (odde), 31, (33) i Kapittel 2.2 i Lay.*

34. Økt 34. Differentiallikningar

34.1. Repetisjon

Me har sett eit par døme på differentiallikningar tidlegare i semesteret. Du bør forsikra deg om at du hugsar dei før du tek fatt på nytt stoff.

Video: Ballkast

Problem 34.1 *Tenk deg at du kastar ei kule opp i vêret. Farten på ballen i høgderetninga når du slipp er* $v_0 = 15$ *m/s. Høgda når du slipp ballen er* $h_0 = 1.8$ *m over bakken.*

Kor høgt over bakken er ballen etter t *sekund?*

Video: Eksponentiell vekst

Korleis løyser me differentiallikningar på denne formen?

$$y'(t) = k \cdot y, \tag{54}$$

$$y(0) = C \tag{55}$$

Video:

Problem 34.2 *Tenk deg eit lodd som heng i ein fjær frå taket. Når me dreg loddet ut av likevekt, vil det ta til å svinga opp og ned. Korleis kan me finna høgda på loddet som ein funksjon av tida?*

Video:

Problem 34.3 *Løys differentiallikingar*

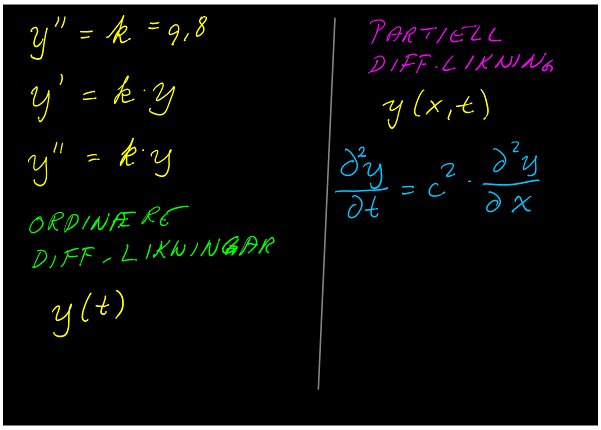
$$ay'' + by' + cy = 0,$$

for vilkårlege verdiar av a, b og c.

Video:

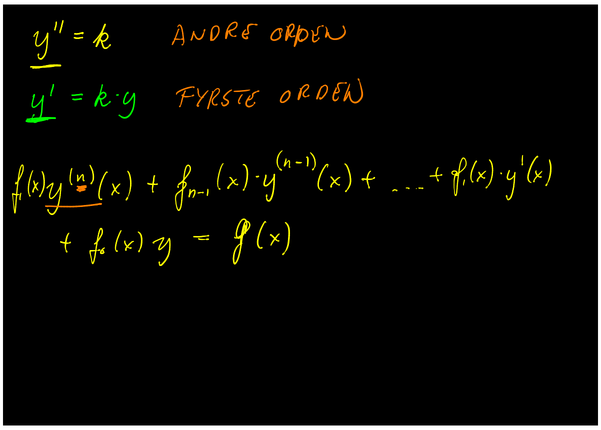
Problem 34.4 *Tenk deg eit lodd som heng og svinger opp og ned i ein fjær frå taket. Kva skjer dersom loddet heng ned i eit kar med olje som heile tida dempar farta?*

34.2. Klassifikasjon av differentiallikningar

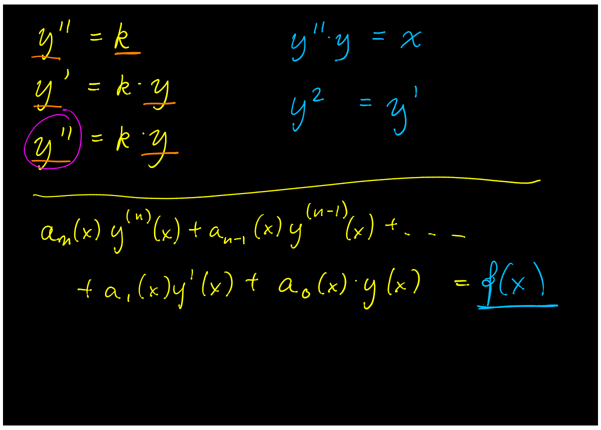


Definisjon 22 *En* ordninær differentiallikning *(ODE) er ei likning som involverer ein funksjon $f(x)$ i éin variabel (x) og dei deriverte, samt variabelen x.*

Me skal ikkje studera *partielle diferentiallikningar* (PDE) som inneber funksjonar i fleire variable, t.d. $f(x, y)$.



Definisjon 23 Ordenen *til ei differentiallikning viser til den høgste ordenen til dei deriverte som inngår. Ei differentiallikning i $f(x)$ er $n$te orden dersom den $n$te-deriverte $f^{(n)}(x)$ inngår, men ingen høgare ordens derivert $f^{(m)}(x)$ inngår ($m > n$).*



Definisjon 24 *Ei differentiallikning i $y(x)$ er* lineær *dersom ho kan skrivast på formen*

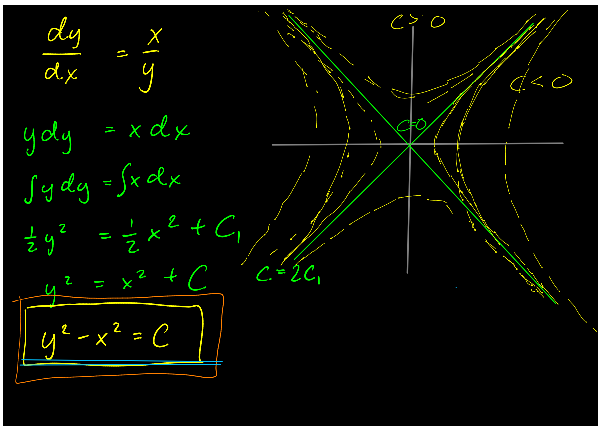
$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Definisjon 25 *Ei lineær differentiallikning i $y(x)$ er* homogen *dersom ho kan skrivast på formen*

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0.$$

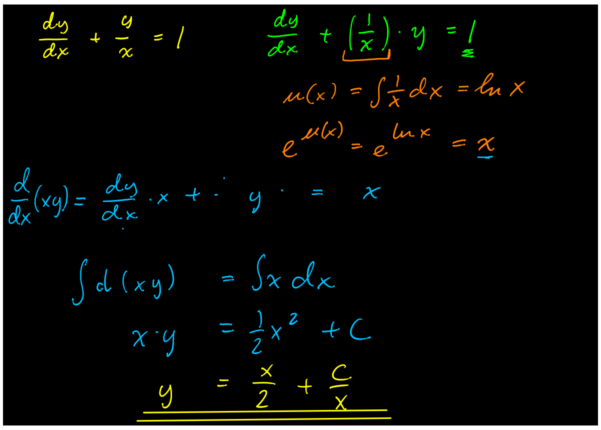
34.3. Fyrsteordens differentiallikningar

Her skal me lære å løysa fyrsteordens differentiallikningar. I læreboka finn du stoffet i Adams og Essex kapitel 7.9 og 18.2.



Problem 34.5 *Løys differentiallikninga*

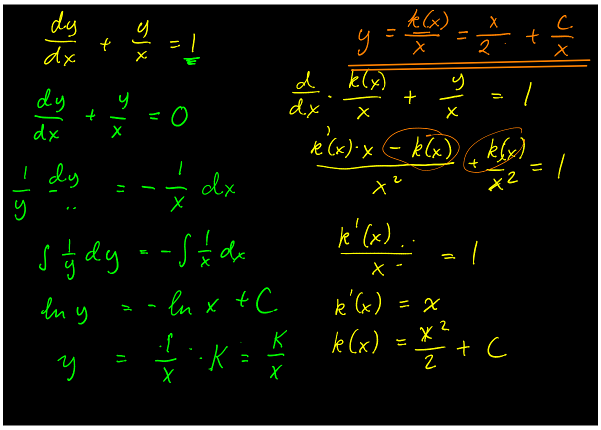
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$



Problem 34.6 *Løys differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1,$$

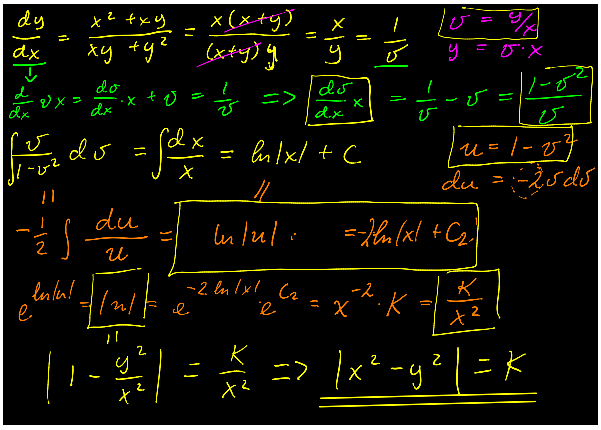
ved hjelp av integrerande faktor.



Problem 34.7 *Løys differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1,$$

ved hjelp av parametervariasjon.



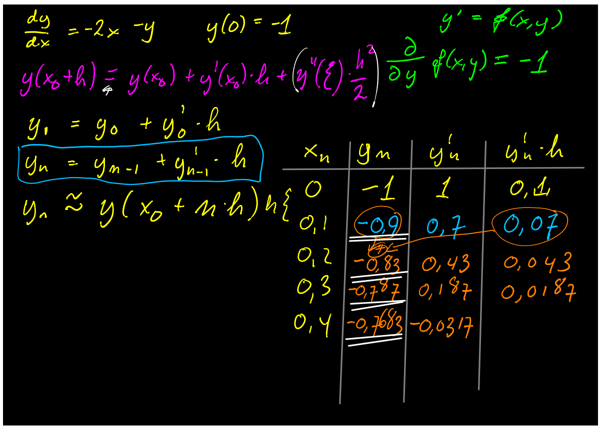
Problem 34.8 *Løys differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}.$$

Oppgåve 34.1 *Oppgåve 1-7 (odde) og 11-19 (odde) i Adams og Essex kapitel 7.9.*

Oppgåve 34.2 *Oppgåve 1, 2, 7, (8a),* men *bruk (a)* $h = 0{,}5$ *og (b)* $h = 0{,}2$*. kapitel 18.3. (Gjer gjerne desse i matlab/rekneark med* h*-ane som står i boka.)*

35. Økt 35. Numerisk integrasjon



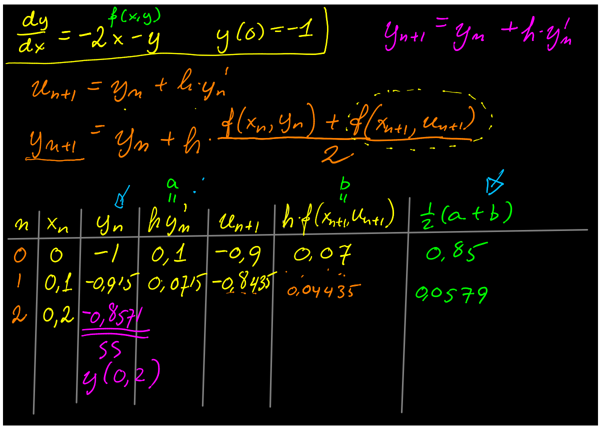
Problem 35.1 *Ta differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \tag{56}$$

$$y(0) = -1. \tag{57}$$

Utan å løysa likninga analytisk, finn verdiane $y(0{,}1)$*,* $y(0{,}2)$*,* $y(0{,}3)$ *og* $y(0{,}4)$*.*

Dømet er henta frå Gerald og Wheatley: *Applied Numerical Analysis* (femte utgåve).



Problem 35.2 *Ta differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \tag{58}$$

$$y(0) = -1. \tag{59}$$

Bruk forbetra Euler til å finna $y(0{,}3)$ *med steglengd* $h = 9{,}1$.

I tillegg til Euler og forbetra Euler, er fjerde ordens Runge-Kutta pensum. Det krev so mange mellomrekningar at det berre vert rot på video. Mynsteret er likevel enkelt å kopiera frå boka.

Oppgåve 35.1 *Oppgåve 1, 3, 5 kapitel 18.2. (Bruk kalkulator/matlab.)*

Oppgåve 35.2 *Oppgåve 1, 9, 11, 13 kapitel 18.3.*

36. Økt 36. Obligatorisk øving

Oppgåve 36.1 (Eksamen juni 2014, Del I) *Lat*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Om mogleg, rekn ut AB *og* BA.

Oppgåve 36.2 (Eksamen juni 2014, Del I) *Finn alle løysingane til likninsystemet*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Oppgåve 36.3 (Eksamen november 2012, Del I) *Finn alle løysingane til likninsystemet*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 2, \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Oppgåve 36.4 *Lat*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn A^{-1}.

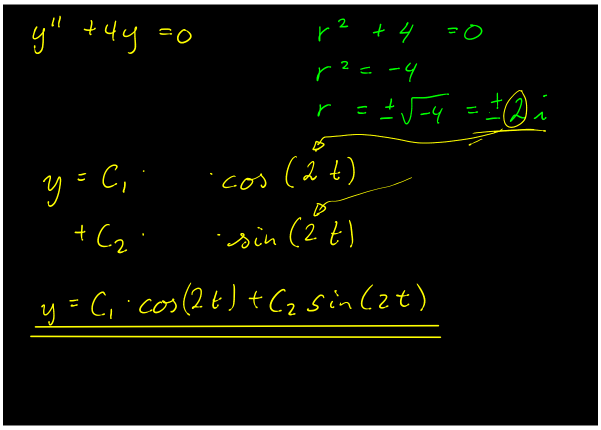
Oppgåve 36.5 (Eksamen juni 2013, Del II) *Løys differentiallikninga*

$$y' = \frac{2y}{x} + x^2.$$

Oppgåve 36.6 (Eksamen juni 2014, Del II) *Løys differentiallikninga*

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}\cos x.$$

37. Økt 37. Lineære differentiallikningar

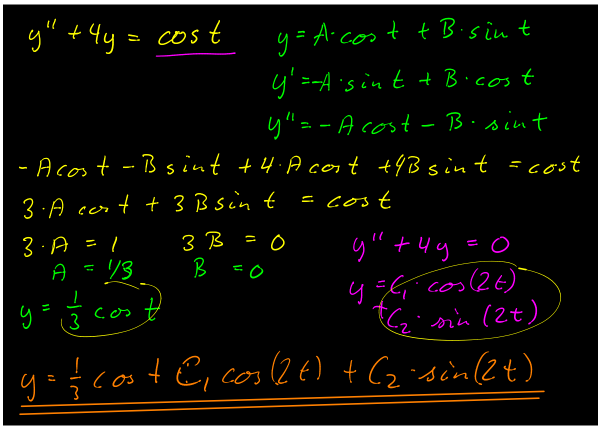


Problem 37.1 *Løys differentiallikninga*

$$y'' + 4y = 0.$$

Oppgåve 37.1 *Løys differentiallikninga*

$$y'' - y = 0.$$

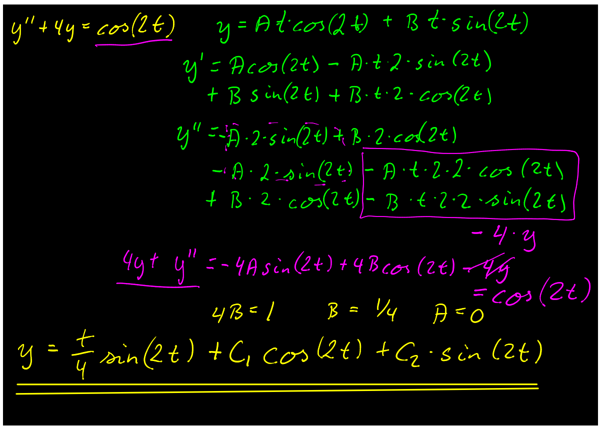


Problem 37.2 *Løys differentiallikninga*

$$y'' + 4y = \cos t.$$

Oppgåve 37.2 *Løys differentiallikninga*

$$y'' - y = \cos t.$$

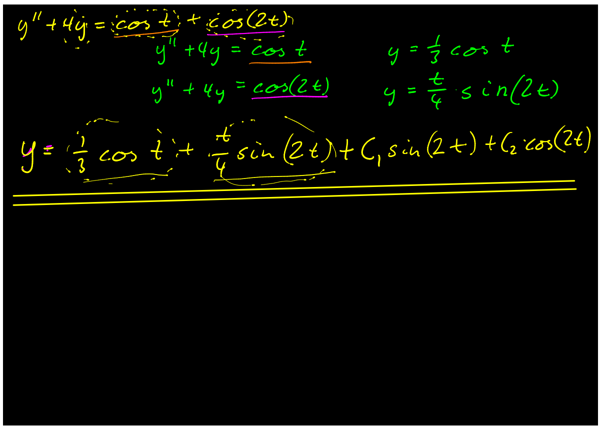


Problem 37.3 *Løys differentiallikninga*

$$y'' + 4y = \cos(2t).$$

Oppgåve 37.3 *Løys differentiallikninga*

$$y'' - y = \cos(\sqrt{2}t).$$



Problem 37.4 *Løys differentiallikninga*

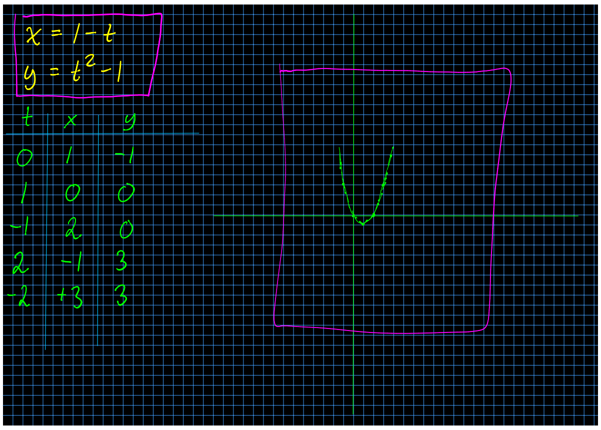
$$y'' + 4y = \cos t + \cos(2t).$$

Oppgåve 37.4 *Løys differentiallikninga*

$$y'' - y = e^t + \cos(\sqrt{2}t).$$

Oppgåve 37.5 *Oppgåve 1, 3, 5, 7, (11) kapitel 18.6.*

38. Økt 38. Parametriske kurver

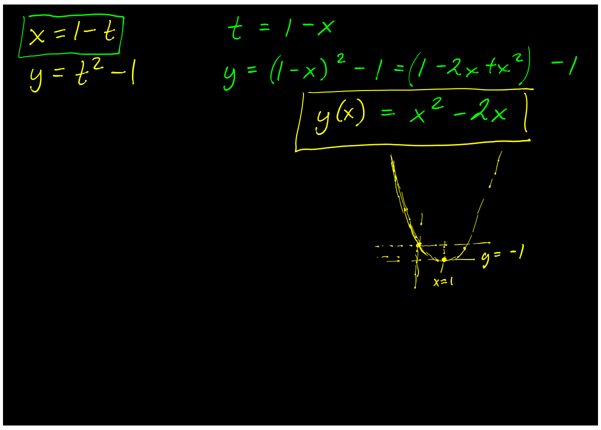


Problem 38.1 *Ei parametrisk kurve er gjeven som*

(60) $$x = 1 - t,$$

(61) $$y = t^2 - 1.$$

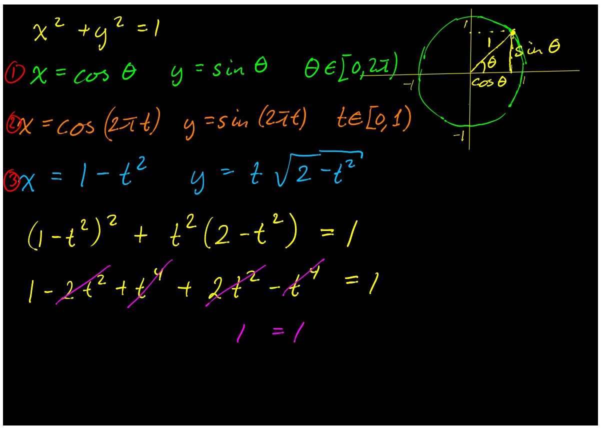
Skisser kurva i eit plandiagram.



Problem 38.2 *Sjå på den same parametriske kurva som i førre oppgåve, dvs.*

$$x = 1 - t, \tag{62}$$
$$y = t^2 - 1. \tag{63}$$

Forklar korleis kurva ser ut, utan å teikna.



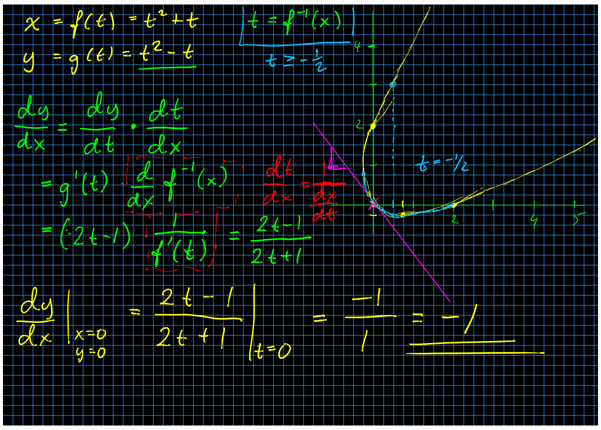
Problem 38.3 *Ein sirkel er definert ved likninga $x^2 + y^2 = 1$. Finn ei parametrisk kurve som definerer den same sirkelen.*

Oppgåve 38.1 *Oppgåve 1, 3, 5 kapitel 8.2. (Bruk kalkulator/matlab).*

Dette er få oppgåver. Me bruker resten av tida på differentiallikningar og matriserekning, og tek fleire oppgåver frå dei siste øktene.

39. Økt 39. Parametriske kurver

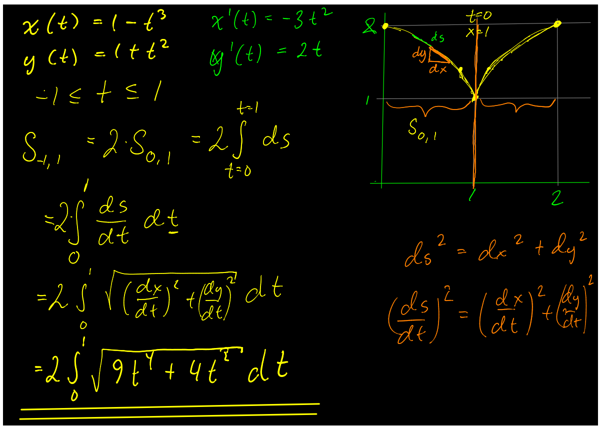
Tips. Dersom du treng å plotta ei parametrisk kurve raskt, so kan du bruka denne tenesta: `https://graphsketch.com/parametric.php`



Sjå på den parametriske kurva

$$x = f(t) = t^2 + t, \tag{64}$$
$$y = g(t) = t^2 - t. \tag{65}$$

Finn stigningstalet til kurva i punktet $(0, 0)$.



Sjå på den parametriske kurva

$$x(t) = 1 - t^3, \tag{66}$$
$$y(t) = 1 + t^2. \tag{67}$$

Finn lengda på kruva for $-1 \leq t \leq 1$.

Oppgåve 39.1 *Oppgåve 1, 9, 11, 13. kapitel 8.3.*

Oppgåve 39.2 *Oppgåve 1, (5), 7, (9), 13 kapitel 8.4.*

40. Økt 40. Repetisjon

Me bruker fyrste time på nedanståande oppvåver om komplekse tal. Andre time bruker me til quiz.

40.1. Komplekse tal (fyrste time)

Oppgåve 40.1 (Eksamen desember 2015, Del I) *Løys* $z^2 + 2iz + 3 = 0$*, der* $i = \sqrt{-1}$.

Oppgåve 40.2 (Eksamen juni 2016, Del II) *Finn alle dei fire løysingane av* $z^4 = i$.

Skissér løysingane i det komplekse planet.

Oppgåve 40.3 (Eksamen november 2012, Del I) *Rekn ut og skriv på rektangulær form*

$$z = \frac{3+i}{1+2i}, \quad \textit{der } i\sqrt{-1}.$$

40.2. Andre time

Oppgåve 40.4 (Eksamen juni 2016, Del II) *Ei kurve er gjeven ved at* $y^2 = x^3 - 5x + 8$.

Bruk implisitt derivasjon til å finna eit uttrykk for y'.

Finn eit uttrykk for linja som tangerer kruva i punktet $(1, 2)$.

41. Økt 41. Obligatorisk øving

Oppgåve 41.1 (Eksamen desember 2014, Del I) *Løys* $z^2 + 3iz + 4 = 0$*, der* $i = \sqrt{-1}$.

Oppgåve 41.2 (Eksamen desember 2014, Del I) *Rekn ut og skriv på rektangulær form*

$$z = \frac{1+3i}{1-2i}, \quad \textit{der } i\sqrt{-1}.$$

Oppgåve 41.3 *Ei parametrisk kruve er gjeven ved* $x = 1 + t^3$ *og* $y = 1 - t^2$, $0 \leq t \leq 2$.

Finn eit uttrykk for lina som tangerer kruva i punktet der $t = 1$.

Oppgåve 41.4 (Eksamen desember 2014, Del II) *Ei differentiallikning er gjeve som*

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} \cos x$$

med startvilkår $y(0) = 1$.

Finn ei tilnærma verdi for $y(1{,}0)$ *ved* Improved Euler *med steglengd* $h = 1{,}0$.

Oppgåve 41.5 (Eksamen juni 2016, Del II) *Eit legemiddel vert tilført intravenøst til ein pasient med ein hastigheit på 6 mg/h (milligram per time). Lat* $y(t)$ *vera mengda av stoffet som er i blodet til pasienten ved tidspunkt* t*. Løys fylgjande initialverdiproblem for* $y(t)$*:*

(68) $$y'(t) = -0{,}03y(t) + 6,$$

(69) $$y(0) = 0.$$

Finn mengda av stoffet når $t \to \infty$.

Oppgåve 41.6 (Eksamen juni 2016, Del II) *Set opp integralet for overflatearealet $S_{x=0}$ av omdreiningslegemet som vert danna når kurva $f(x) = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 1$, vert rotert om y-aksen.*

Bruk Simpsons metode til å finna tilnærminga S_4 til arealet $S_{x=0}$.

A. Gamle eksamensoppgåver

1. Hausten 2016
2. Våren 2016
3. Hausten 2015
4. Våren 2015
5. Hausten 2014
6. Våren 2014
7. Hausten 2013
8. Våren 2013
9. Hausten 2012
10. Våren 2012

B. Obligatoriske arbeidskrav

Dette emnet har obligatoriske arbeidskrav i form av *student-leidde øvingar*, cirka sju gongar i løpet av semesteret. Desse timane er merkte som «obligatorisk øving» i kalendaren i BlackBoard. Likeins finn du oppgåvene til kvar av desse timane under overskrifta «obligatorisk øving» i kompendiet.

Kvar student må førebu seg for å presentera løysingane for klassa. I timen trekk me tilfeldige studentar for å løysa kvar oppgåve. Det obligatoriske arbeidskravet er ein føresetnad for å få gå opp til eksamen, og spelereglane er som fylgjar.

1. Ein skal vera budd til å presentera og forklara løysinga. Det krev god forståing, men ikkje at ein står aleine om løysinga. Det er lov, og som regel lurt, å samarbeida med andre i førebuingane.

2. Når me møtest til tima skal alle kryssa av på ein klasseliste, dei oppgåvene dei er budd til å presentera.

3. For kvar oppgåve dreg me ein tilfeldig student som skal presentera løysinga på tavla.
4. Det er ikkje nok å kopiera notatane sine til tavla. Me ventar forklaring, og me ynskjer å stilla spørsmål.
5. Kravet for å få gå opp til eksamen er 50% avkryssa oppgåver i løpet av heile semesteret.
6. Studentar som openbert har bløffa når dei vert trekt til å presentera, og overhode ikkje skjøner løysinga, misser alle kryssa den dagen. Klassa får vurdera slike tilfelle.
7. Det er lov å gjera feil, so lenge ein har eit ærleg og fornuftig forsøk, og har grunn til å tru at det er rett.
8. Kravet er sett so lågt som 50% for å gje rom til å vera sjuk eller gå i gravferd (e.l.) ein gong i løpet av semesteret. Langvarig sjukdom eller anna ekstraordinært stort fråvêr må vurderast individuelt.
9. Studentar som har gode grunnar for ikkje å gjennomføra kravet må ta kontakt so snart som råd. Det gjeld både langvarig sjukdom, angst/depresjon som kan gjera det vanskeleg å presentera i klassa, og andre gode grunnar.

C. Utkast til seinare økter

C.1. Kjerneregelen

Oppgåvene nedanfor er dels inspirert av og dels henta frå Kelly Day, Deanna Sessions, Lisa Smith og Andrew Wlazlo: Chain Rule & Implicit Differentiation.

Video: Kjerneregelen

Problem C.1 *Ein biolog modellerer veksten i ein bakteriekultur. Talet på celler er $y(t)$ der t er talet på veker etter eit vilkårleg starttidspunkt. Biologen finn fylgjande samanheng:*

$$y(t) = 800e^{7t-182},$$

Kor raskt veks bakteriekulturen på tidspunkt t? Dvs. me ynskjer den instantane vekstraten i celler/dag.

Video: Løysing utan kjerneregelen

Der finst eit alternative resonnement for å løysa oppgåve C.1 utan å kunna kjerneregelen. Svaret vert det same.

C.2. Notes

Finn

$$\frac{d}{dx}e^x$$

1. Folketal
2. *Edge detection*
3. Unit cost
4. Fart under bilferd

C.3. Obligatoriske oppgåver

Desse oppgåvene er obligatorisk. Førebu deg på å presentera løysingane i klassa. Hugs å grunngje svara, og forklara korleis du tenkjer i detalj.

Oppgåve C.1 *Lat* $f(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 3$ *og finn den deriverte* $f'(x)$.

Oppgåve C.2 *Lat* $f(x) = x^6 - 5x^5 - 4x^4 + x^2 + 10x + 3$ *og finn den deriverte* $f'(x)$.

Oppgåve C.3 *Lat*

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$$

og finn den deriverte $f'(x)$.

Oppgåve C.4 *Lat* $f(x)$ *og* $g(x)$ *vera to funksjonar, der me kjenner dei deriverte* $f'(x)$ *og* $g'(x)$. *Lat* $h(x) = f(x) - g(x)$ *og finn den deriverte* $h'(x)$. *Bruk definisjonen av* $f'(x)$ *og evt. reknereglane for grenseverdiar.*

Oppgåve C.5 *Lat* $f(x)$ *og* $g(x)$ *vera to funksjonar, der me kjenner dei deriverte* $f'(x)$ *og* $g'(x)$. *Lat* $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *og finn den deriverte* $h'(x)$. *Bruk definisjonen av* $f'(x)$ *og evt. reknereglane for grenseverdiar.*

C.4. Oppgåver

- 29. Sept: Kap 5.6: 1-9(odde), 13, 15, 21, 23, 41(se ex9), 43.
- 30. Sept: Kap 5.7: 1, 3, 7, (17). Kap 6.1: 1-7 (odde), ((9)), 17, (21), ((31)) + ark med oppgaver på fronter.
- 1. Okt.: Kap 6.2: 1, (3), 5, 9 (poly.div), 11, (21) og (23) + ark med oppgaver på fronter.
- 13. Okt.: Kap 6.1: 9. Kap 6.3: (1), 3, 5 (se formelsamling), 7, (9).
- 14. Okt.: Kap 6.6: 3 (kutt T16 og M8), 5, 7.
- 15. Okt.: Kap 6.7: 1, 3, 5, 6. Kap 7.1: 1, 3 (Regn kun på en måte – ikke to som oppgaven sier.)

- 20. Okt.: Kap 7.1: 1-5 (alle, men bruk den metoden som er fornuftig – ikke begge). Kap 7.1: (27) og Kap 7.2: 1, (11).
- 21. Okt.: Kap 7.3: 1, 3, 7 (se ex2), (5 - del i to biter), 20, 21, 23 og ((25 - trig subst.)).
- 22. Okt.: Kap 7.5: 1, 3 (bruk m=ln(sqrt(2)+1)), 13, 23 (Vent med denne!) + ark med oppgaver på fronter.
- 27. Okt.: Kap 7.5: 23. Lay: Kap 1.1: 1, 3, (17).
- 28. Okt.: Lay: Kap 1.1: 13. Kap 1.2: 1-11 (odde), (13) og (15).
- 29. Okt.: Lay: Kap 1.3: 1-13(odde). Kap 1.4: 1-13(odde).
- 3. Nov.: Lay: Kap 2.1: 1, 2, 3, 7, 9, 10 og 11.
- 4. Nov.: Lay: Kap 2.1: 27, (28). Kap 2.2: 1-7 (odde), 31, (33).
- 5. Nov.: Adams: Kap 7.9: 1-7 (odde) og 11-19 (odde).
- 10. Nov.: Kap 18.3: 1, 2, 7, (8a) MEN bruk (a) h=0.5 og (b) h = 0.2. (Gjør gjerne disse i matlab/regneark med h-ene som står i boka.)
- 11. Nov.: Kap 18.6: 1, 3, 5, 7, (11). Kap 8.2: 1, 3, 5 (Bruk kalkulator/matlab).
- 12. Nov.: Kap 8.3: 1, 9, 11, 13. Kap 8.4: 1, (5), 7, (9), 13.