Matematisk Problemløysing 2020

Hans Georg Schaathun

27. oktober 2020

Foilar: Introduksjons-førelesing

Velkommen til emnet i Matematisk Problemløysing hausten 2020. Alt materiale til kurset vert publisert her. BlackBoard vert brukt til kunngjersler og innleveringar.

Det vert eit spesielt semester, med smittevern og stadige regelendringar. Eg trur at eg har funne eit opplegg som er godt egna for målgruppa på kurset. Vonleg får me lov å arrangera eksamen som planlagd.

Målgruppa er studentar som treng å kunna tenkja matematisk omkring konkrete problem i vidare studium, men som ikkje har særleg god forståing for abstrakte matematikkproblem og dermed gjerne har slitt med matematikkfaget i tidlegare skulegang.

Førelesar Professor Hans Georg Schaathun hasc@ntnu.no. Tak gjerne kontakt med spørsmål og anna. Det enklaste er å ta kontakt på undervisingsøktene, men send gjerne epost eller stikk innom på B326 (so langt smittevernreglane tillet det).

Hovudøkt Hovudøkta er 4h på nett. Store delar av økta vert gruppearbeid, men me vil alltid både starta og avslutta med plenumsførelesing. Me bruker BlackBoard Collaborate; dette vert kunngjort i BlackBoard

Rettleiingsøkt Alle studentar er tildelt ein 2h rekneøkt. Desse går fysisk, med eldre studentar som læringsassistentar. Her kan de velja om de vil arbeida individuelt eller i gruppe.

Vurderingsform Mappevurdering. Sjå under Praktisk Informasjon.

Obligatoriske arbeidskrav Der er to typar arbeidskrav i emnet.

1. Refleksjonsnotat som inngår i mappa.
2. Automatisk retta rekneoppgåver som ikkje inngår i mappa.

Alle fristane vert kunngjorde i BlackBoard

Utstyr Til nettøktene er det viktig at alle har maskin med kamera og brukbar mikrofon. Den innebygde mikrofonen gjev som regel mykje støy. Billege hovudtelefonar med mikrofon er som regel bra nok.

Det er ein stor føremon å ha skjerm med penn til å skriva og teikna på frihand. Dette kostar ein del, men det gjer samarbeid over nett mykje enklare, og dersom du finn noko som passar for deg, so kan du spare inn ein del på papir og penn. Der er mange løysingar, både pennar til mange nettbrett, penneskjermar til stasjonære datamskiner og bærbare maskiner med berøringsskjerm og penn. Nettbrett med penn vil nok vera det billigaste og enklaste for dei fleste.

Læringsmateriell Det viktigaste lærematериellet er oppgåvesamlinga på denne sida, ordna veke for veke gjennom semesteret.

Der er ingen fasit til øvingane. Det er med hensikt. De skal bruka heftet til å drøfta løysingane med kvarandre og sikta mot ei felles overtyding. Det er berre på denne måten de kan opparbeida tanksetts- og kommunikasjonskompetanse. Alle røynslene våre viser at fasit er ei bjørneteneste som motverkar læringsmåla.

Det er derimot alltid lov å spørja om råd. Både førelesar og læringsassistentar er her for å hjelpa, og når de trengst bidreg me med løysingsforslag.

Formelark Dette formelarket har tidlegare vore brukt på eksamen. Det kan vera greitt å ha for handa.

Praktisk informasjon

Læringsmål og studieteknikk

Læringsmåla

Kunnskap: Kandidaten skal

1. kunna sjå samanhengen mellom abstrakte matematiske modellar og konkrete problem i bedriftsøkonomi og marknadsanalyse.
2. ha ein heilskapleg forståing av problema som er nemnde under ferdigheitsmåla, og kjenna til ulike løysingsstrategiar der det er relevant.
3. kunna vita kva gjennomsnitts- og grensekostnad fortel om lønsemd.

Ferdigheter: Kandidaten skal

1. kunna rekna på rente- og finansproblem ved hjelp av eksponential- og logaritmefunksjonar og geometriske rekkjer.
2. kunna rekna på lineære og kvadratiske kostnads- og inntektsfunksjonar, løysa balanseproblem ved hjelp av likningar.
3. kunna analysere og drøfta polynomfunksjoner, inkl. dervasjon og identifisering av null- og ekstremalpunkt.
4. kunna bruka algebraiske formuleringar for å koma fram til generelle slutningar.

Kandidaten bør

1. kunna drøfta og analysera rasjonale funksjonar og eksponential- og logaritmefunksjonar.
2. kunne løysa abstrakte og algebraiske problem innanfor problemområda nemnde over.
3. kunne overføra løysingsteknikkane nemnde over til andre typar problem.

Kompetanse: Kandidaten skal

1. kunna kommunisera om og ved hjelp av matematikk.
2. kunna matematisera, dvs. finna løysbare matematiske formuleringar for problem frå røynda.

Kva er matematikk?

Alle har studert matematikk før, med større eller mindre hell, og har heilt sikkert ei meining om kva matematikk er. Det er ikkje sikkert denne meininga dekkjer *matematisk problemløysing.*

Svært ofte legg skulematematikk vekt på *ferdigheitsmåla*: å rekna ut dette og hint. Ein gong gav det meining. Eg har møtt tilårskomne kollegaar som hadde den fyrste jobben sin som *Computer*. Dei trengte rekneferdigheiter.

Ingen studentar i dag kjem til å få jobb som *computer*. Der er andre mål som tel i dag.

Legg særleg merke til kompetansemåla (over). Me skal bruka matematikk til å kommunisera om økonomiske og samfunnsmessige samanhengar, og bruke matematisera, dvs. omsetja, problem frå røynda til formelle og løysbare problem i matematikken. Me skal ikkje gløyma ferdigheitsmåla heilt, men langt meir enn mål i seg sjølve, er ferdigheitane middel til andre mål.

Om å svara på oppgåver

Kompetansemåla i kurset har fylgjer for korleis ein skal arbeida med og svara på oppgåver. Utrekninga er den *minst* viktige delen av oppgåva. Langt viktigare er det å kunna *kommunisera* tolkinga og løysinga til andre, slik at dei vert overtydde om at svaret er rett. Fyrst og framst skal ein kunne overtyda kollegar og medstudentar som kan like mykje eller litt mindre enn ein sjølv.

Der er altfor mange forskjellige oppgåver til at ein kan pugga løysingsmønster. Der er uansett ingen pris for å løysa oppgåva med same metode som førelesaren ville ha brukt. Ein er nøydd til å tenkja sjølv. Dei fleste oppgåvene er basert på problem frå røynda, og ein må tenkja slik at ein får svar som gjev meining i røynda.

Ikkje alle oppgåver har ein fasit. Der er tolkingsrom i matematikk. Det må ein læra å handtera, gjerne gjennom å drøfta tolkingar med andre.

Studieteknikk

Samarbeid løner seg. På mange ulike måtar.

Ein lærer mykje av å forklara for andre. Ein lærer òg mykje av å retta for kvarandre.

Det er ikkje nok i kurset å løysa oppgåvene slik at sensor kjenner att nok som er rett. Ein skal svara slik at medstudentar vert overtydde om at svaret er rett; ogso medstudentar som kan litt mindre enn ein sjølv. Kven kan best gje tilbakemelding på det?

Det er òg nyttig å diskutera med fleire ulike personar, for å få ulike perspektiv.

Dette er bakgrunnen for gruppearbeidet som inngår i dei organiserte øktene. Det er ein god idé å byggja vidare på dette og danna studiegrupper som de kan bruka i eksamenslesinga og vidare i studiet.

Vurdering og arbeidskrav

Vurderinga er basert på ei avsluttande mappe (sjå nedanfor). For å få levera mappa må ein ha gjort obligatoriske arbeidskrav, både to refleksjonsoppgåver og to øvingar med automatisk retta rekneoppgåver.

Studentar som har fullført obligatoriske arbeidskrav i *Matematisk Probleløysing* 2019, treng ikkje å ta arbeidskrava på nytt. Merk at obligatoriske arbeidskrav frå andre emne, eller frå før 2019 ikkje vert godkjende, uansett. Dersom ein skal ha godskrive godkjenning frå 2019 er det viktig å sjekka listene før eksamen, og evt. melda feil so raskt som råd.

Refleksjonsoppgåver

Målet med refleksjonsoppgåvene er å tenkja gjennom (reflektera over) gruppearbeidet for å få best mogleg utbyte. Her legg me særleg vekt på kompetansemål: tankesetts-, modellerings- og kommunikasjonskompetanse.

1. De skal levera refleksjonsoppgåver to gongar: innan 15de september og innan 1ste november. Desse kjem opp i BB Learn.
2. Innleveringa er *individuell*, sjølv om ho byggjer på gruppearbeid. Innleveringa skal vera *dine eigne* tankar om de som de gjorde saman.
3. Du vel sjølve kva for ei av øktene de byggjer innleveringa på, uavhengig av kva resten av gruppa gjer. Du kan gjera den fyrste innleveringa den fyrste veka, og du vinn inkje på å venta.
4. Fristene er absolutte, uansett grunn. Fristen er sett seint av omsyn til dei vert forseinka av sjukdom eller liknande. Meininga er at de gjer innleveringa ved fyrste høve.
5. Den siste innleveringa skal ta utgangspunkt i ei økt frå temaet om funksjonsdrøftig. Dvs. at de ikkje kan starta på denne innleveringa før i slutten av september.
6. Kravet for å få godkjent er ein konstruktiv refleksjon over kva du kan læra frå

gruppearbeidet, og korleis du kan innretta studiearbeidet framover. Dvs. at du kan levera inn sjølv om gruppearbeidet ikkje har vore heilt vellukka, berre du har nokon tankar om kvifor det ikkje var vellukka og kva de kan gjera annleis.

7. Innleveringa skal ikkje ta meir enn 1-2h å gjera, etter at de har gjort gruppearbeidet. Lever inn det du har, heller enn å bruka mykje tid på perfeksjonering. Dersom nokon skulle levera noko som ikkje vert godkjent, so kan me heller prata om det, og gje ei sjanse til.
8. Obligatoriske arbeidskrav tel ikkje på karakteren, men du kan godt bruka stoffet frå arbeidskravet i mappa.
9. Det er vanskeleg å gje god tilbakemelding skriftleg, men eg tek gjerne ein prat individuelt om innleveringane. Ta kontakt.

Krav til Innleveringa Innleveringa skal innehalda

1. Namn på alle i gruppa og dato for gruppearbeidet.
2. Løysing på oppgåvene som de arbeidde med. Ikkje tenk på oppgåver som de ikkje rakk over i gruppa.
3. Kort synopsis av diskusjonen i gruppa. Kva brukte de tid på? Kva var vanskeleg?
4. Refleksjonsnotat over ditt eige og gruppa sitt arbeid, maksimum éi side maskinskrive. Her skal du ta med
   a) 2-3 ting som *du* gjorde bra
   b) 2-3 ting som *gruppa* gjorde bra
   c) éin ting som *du* kan gjera betre framover
   d) éin ting som *gruppa* kan gjera betre framover

Refleksjonsnotatet kan vinklast på ulike måtar, og du kan ikkje ta med alt. Legg vekt på det som du synest er viktigast for å koma vidare i emnet. Alle dei fylgjande spørsmåla er moglege vinklingar for å utdjupa det som var bra og det som kan verta betre.

1. Kva har du lært? Kva kunne du ha lært?
2. Kva har gruppa lært?
3. Korleis trur de at denne lærdommen kan koma til nytta seinare (i studie eller yrke)?
4. Kva kunne andre i gruppa hjelpa deg med?
5. Kva kunne du hjelpa andre i gruppa med?
6. Korleis formulerer de løysingane for at heile gruppa skal fylgja det same tankesettet?
7. Kva var vanskeleg? Kva var lett?

8. Kva har du/de gjort bra?
9. Kva vil du gjøre annleis framover?

Sjølve refleksjonsnotatet leverer du i BB Learn. Oppgåveløysingane kan du anten inkludera i refleksjonsnotat, eller visa til dersom dei ligg i OneNote. Hugs å merka alt tydleg.

Automatisk retta oppgåver

Dei automatisk retta oppgåvene skal trena grunnleggjande rekneevner. Systemet er adaptivt, slik at du får stadig vanskelegare oppgåver når du viser at du kan svara godt. Du har ein rating som går opp når du svarer rett og ned når du svarer feil. Du får stjerner etter kvart som ratinga går opp.

1. Der er to oppgåvesett i CAPQuiz. Fristane kjem opp i BB Learn.
2. Kravet for å få godkjent er tre stjerner.
3. Du misser ikkje stjerner om ratinga går ned, so du tapar inkje på å arbeida vidare.
4. Settet vil stadig vera ope etter fristen, men du må oppnå den tredje stjerna innan fristen.
5. Utsetjing vert gjeve basert på dokumentert sjukdom og liknande omstende.
6. Det er førebels ikkje klart om CAPQuiz vert tilgjengeleg gjennom Moodle eller BlackBoard. Dette vert klart når det fyrste oppgåvesettet er tilgjengeleg.

Avsluttande mappe

Den avsluttande mappa vert levert etter at undervisingsperioden er slutt. Arbeid som er levert som obligatorisk arbeidskrav kan, men må ikkje, inngå i mappa, anten som dei var eller i revidert form. Det er opp til deg om du vil levera arbeid som du har gjort tidlegare, eller om du vil gjera nye oppgåver og dra nytte av at du kan sjå heile semesteret i samanheng.

NB! Nedanståande er eit utkast og kan verta endra.

Mappa skal omfatta

1. Svar på eit utval oppgåver som dekkjer alle dei 3-4 hovudområda i pensum. Du skal ikkje visa at du kan alt, men at du har lært noko som du kan bruka vidare og som ikkje er trivielt.
2. Refleksjonsnotat, som omfattar
   a) Eigenvurdering, der du tek stilling til kva du har lært i høve til læringsutbytta, og kva karakter du bør ha.

b) Refleksjon over oppgåvene. Kva har du lært og kvifor er dette nyttig for *deg*? Kva gjer oppgåva viktig for deg?

Refleksjonsnotatet skal vera maksimalt fem sider maskinskrive (minst 11pt font). Det er ikkje eit mål å skriva mykje; ver kortfatta og konsis, men få med breidda i det læringsutbyttet du har hatt.

Oppgåvesvara kan godt vera handskrivne (heilt eller delvis). Du må i alle fall bruka teikningar og notasjon for å presentera svara godt, og teksta skal visa at du bruker og forstår teikningane og notasjonen. Du skal ikkje ta med fleire oppgåver enn det du har rom til å kommentera i refleksjonsnotatet. Du skal ha ein grunn for å inkludera kvar oppgåbve. *Oppgåver som ikkje er nemnde i refleksjonsnotatet vert ikkje vurderte.*

Oppgåver frå øvingsheftet kan brukast i mappa dersom løysingsforslag *ikkje* har vore delt ut. Det kan vera lurt å variera tala i oppgåvene frå heftet, slik at oppgåva ikkje vert identisk med det som alle andre leverer. Det er òg lov å levera heilt andre oppgåver enn dei som har vore gjeve i kurset. Di meir originale oppgåver du leverer, di meir matematikkompetanse er det råd å visa. Det er likevel ikkje hjelp i å ta seg vatn over hovudet.

Mappa skal vera

1. Presentert med tanke på lesarar som kan litt mindre matematikk enn deg sjølv. Tenk på medstudentar på ditt eige studium og ikkje på sensorar med doktorgrad i matematikk.
2. Ryddig og oversiktleg. Det er ditt ansvar at dei viktigaste momenta kjem godt fram.
3. Konkret og personleg. Det er *ditt* forhold til matematikk som er vesentleg. Ikkje generelle resultat som sensorane synest er gøy å halda på med.

Karakterane skal me typisk forstå som fylgjer.

E tyder at studenten har fått eit visst utbytte frå kvart av dei 3-4 hovudtemaa, men neppe kan nok til å bruka matematikken vidare i studiet utan at det krev ekstrainnsats. Mappa dekkjer alle dei fire hovudtemaa i pensum, med svar på nokre av dei mest avanserte oppgåvene, men treng ikkje inkludera korsmerkte oppgåver. Studenten viser at han ser samanhengen mellom problem frå røynda og den matematiske representasjonen som me bruker for å løysa dei. Forståinga har eit visst personleg preg der matematikken vert forstått ut frå eigen røysnler og vyar.

C skal tyda at studenten kan nok til å bruka matematikken i resten av studiet. Mappa skal då ha gode og fullstendige svar på nokre av dei mest samansette oppgåven. Normalt er der nokre korsmerkte oppgåver tekne med. Studenten har ikkje alltid lært eit vidt spektrum av matematiske teknikkar, men dei mest sentrale teknikkane har han gjort til sine eigne. Matematikken er gjort meiningsfull i ein samanheng som er viktig for studenten sjølv.

A tyder at studenten overraskar. Han tek i bruk teknikkar frå emnet på nye problem som ikkje er diskutert og løyser oppgåver eller oppgåvevariantar som ingen andre har løyst. Fleire av dei mest avanserte teknikkane som er gjennomgått i øvingane (dvs. korsmerkte oppgåver) er demonstrete. Refleksjonen er grundig, personleg og balansert. Oppgåvesvara er grundige og feilfrie, og samanhengen mellom det praktiske problemet og den matematiske metoden er tydeleggjort.

B og **D** vert brukte når mappa har vesentlege drag frå både høgare og lågare karakterar.

F (stryk) tyder at studenten ikkje har dekt heille breidda av læringsmål i emnet. Dette er tilfellet dersom ikkje alle tema er dekte, eller dersom berre dei enklaste, innleiiande oppgåvene er inkludert. Det er òg tilfellet når oppgåvene i matematisk form er perfekt løyste, men tolkinga i den konkrete og praktiske situasjonen manglar. Mapper utan refleksjon, eller der refleksjonen er upersonleg og overdrive generell, får òg F.

Det er klart at utan skriftleg skuleeksamen under kontrollerte tilhøve, er det uråd å kontrollera om kanditaten kan rekna, eller om han har brukt maskin eller fått hjelp av andre. Refleksjonen vil derimot visa om kandidaten kan bruka utrekningane på ein måte som er nyttig for eiga framtid. Ein slik refleksjon er personleg og unik, og det vil vera openbert fleire studentar leverer same refleksjon. Det vert klasifisert som juks (plagiat), i tillegg til at det ikkje møter kravet om at refleksjonen er personleg.

Dette er ikkje til hinder for å henta idéar eller læra av kvarandre. Det som er viktig er at du skriv kva du har lånt og ikkje minst korleis du tolkar det og set det saman med resten. Gjennom å henta idéar og tolka eller vidareutvikla dei, viser du at du kan bruka matematikken konstruktivt.

Pensum

Oppgåvesamlinga i dette dokumentet (kursvevsida) definerer kjernen i pensum.

Lærebok som utfyller stoffet: Bjørnestad, Olsson, Søyland og Tolcsiner: *Matematikk for økonomi og samfunnsfag*, 8. eller 9. utgåve, samt tilhøyrande løysingsforslag. Kapittel 1-5, bortsett frå 5.6, 5.7 og 5.8.

Kommentar

Ulikt læreboka freistar oppgåvesamlinga å visa korleis ein tenkjer matematisk for å løysa problem frå røynda. Dette er eit perspektiv som er heilt sentralt for læringsmåla i emnet, men som me ikkje finn dekt av nokon bøker på marknaden.

Mesteparten av undervisinga vil fokusera på dei tre hovudtemaa som er dekte av øvingsheftene.

Andre tema vert dekt innimellom, men dei som ynskjer full kontroll på alle delar av pensum må lesa ein del av stoffet sjølv. Prinsippet er at alt som står i læreboka (kapittel

1-5.5) er pensum, men ikkje alt er like viktig. Det er venta at 20–25% av oppgåvene på eksamen krev kompetanse utover dei tre hovudtemaa som øvingsheftet dekkjer.

Konsekvensen av dette er at dei som tenkjer at C er ein god karakter, skal fokusera på øvingshefta og forsikra seg om at dei kan dettte skikkeleg. Dei som synest at C er ein dårleg karakter må lesa heile læreboka og gå på jakt etter spanande oppgåver.

Gamle eksamensoppgåver

- Hausten 2019 (bokmål, løysingsforslag) med vedlegg (bokmål)
- Våren 2019 (bokmål, løysingsforslag)
- Hausten 2018 (bokmål, løysingsforslag) med vedlegg (bokmål)
- Våren 2018 (bokmål, løysingsforslag)
- Hausten 2017 (bokmål, løysingsforslag)
- Kontinuasjonseksamen 2017 (løysingsforslag)
- Desember 2016
- Juni 2016 (førebels fasit)
- November 2015 (skisse til løysing)
- Våren 2015 med løysingsforslag

Forord til øvingsheftet

Matematikk er vanskeleg for mange. Ofte framstår matematikken som upraktisk, abstrakt og fjern frå daglegdagse problem og behov. Men det treng ikkje vera slik.

Matematikken har alltid vore motivert frå praktiske og daglegdagse problem. Dei gamle grekarane studerte geometri for å måla opp jordbruksland. Eksponentialfunksjonen finn me i Babylon, der han vert brukt til å rekna med rentesrente. Newton fann opp derivasjon, fordi han trong det for å forklara korleis planetane rører seg.

Det er skulen som har skapt eit feilaktig inntrykk av matematikk hovudsakleg handlar om å løysa abstrakte problem. Skulen belønner dei som liker å løysa abstrakte problem utan bry seg om kvifor. Mange kontekstuelle tenkjarar, som kan resonnera logisk og grundig når problema er konkrete og meiningsfulle, vert straffa. Verda treng nokre abstrakte tenkjarar, for å utvikla ny teori som kanskje ein gong kan verta nyttig. Verda treng *svært mange* kontekstuelle tenkjarar, som kan løysa praktiske og jordnære problem presist, vha. matematiske metodar.

Sjølv om abstrakt tenking er nyttig i all matematikk, so treng ein ikkje vera ein racer i abstrakt matematikk for å verta dyktig i matematiske metodar. For dei fleste har det overhodet ingen verdi å kunna løysa abstrakte problem, utan som ein del av eit konkrete problem.

Denne boka handlar fyrst og framst om *matematisering* (eller matematisk modellering), kunsten å ta konkrete, daglegdagse problem, og gje dei ein matematisk form, slik at me kan løysa dei med kjende og generelle matematiske metodar. Problemet må rett nok løysast med abstrakte teknikkar, men dét har ingen verdi om me ikkje også kan føra løysinga tilbake til det konkrete problemet. So langt det er råd, vil me sjå på både konkrete og abstrakte resonnementer, og sjå at dei gjev same resultat.

Dette skal vera ei bok for mange av dei som trur at dei ikkje forstår matematikk. Sjølv om ein alltid har gjort det dårleg i skjøna abstrakte resonnementer eller pugga abstrakte løysingsteknikkar, so er der ingen grunn for at ein ikkje kan forstå dei same resonnementa i ein konkret kontekst.

Om presentasjonen

Boka går ut frå at studentar lærer (1) ved døme (modellæring) og (2) ved å prøva seg på eiga hand (aktiv læring). Innhaldet er difor, i all hovudsak, oppgåver med og utan løysingsforslag. Som regel kjem oppgåvene i par, éi med løysingsforslag (eksempeloppgåve) og éi utan (øvingsoppgåve). Eksempeloppgåva er meint å forklara løysingsmetoden, og øvingsoppgåva er meint som øving.

Nokre nye omgrep og reknereglar vert innført gjennom døma, utan formell definisjon. Somme tider vert dei utdjupa i påfylgjande merknader. Hensikta er at lesaren skal læra seg korleis omgrep og rekneregler vert nytta i praksis, og bruka dei naturleg. Det har ingen verdi å pugga definisjonar. Definisjonane er utelatne for å unngå å freista til misbruk.

Boka er ikkje meint for skumlesing eller som oppslagsbok. Det er viktig å lesa alle døma og løysa oppgåvene etter kvart for å få med seg nye omgrep og idéar. Det handlar like mykje om å koma inn i eit tankesett og verta van med å tenkja matematisk, som om å læra nokre nye omgrep og teknikkar.

Oppgåvene liknar mykje på kvarandre; likevel er nesten alle øvingsoppgåvene forskjellige. Målet har vore å innføre éin og berre éin ny idé i kvar oppgåve. Lesaren bør ta seg tid til å reflektera over oppgåvene og løysingsteknikkane, og samanlikna liknande oppgåver. Få vil klara å pugga løysingsmetodane i alle dei variantane som er brukt. Håpet er at lesaren vil læra seg nokre få kjernemetodar som kan varierast og tilpassast ulike oppgåver. Det krev at ein tenkjer gjennom kvar oppgåveløysing og reflekterer over kva som er nytt og kva som er gjenbrukt.

Der er ingen fasit til øvingsoppgåvene. Fasit har svært ofte ein negativ effekt, og skapar eit einsidig fokus på å finna rett svar, meir eller mindre på måfå. For å ha nytte av matematikken i praksis, er det uunnverleg at ein evnar å vurdera eigne svar kritisk, å overtyda andre om at ein har tenkt rett, og å stola på sine eigne evner. Desse evnene øver ein opp ved å drøfta svar og løysingar med andre, ikkje ved å samanlikna med ein fasit.

Løysingsforslaga er ikkje konsekvente. Liknande oppgåver er somme tider løyst på forskjellig vis. Det er fordi me ikkje ynskjer å skapa nokon illusjon om at der er éin riktig eller beste måte å gjera ting på. Somme tider kan ein få inntrykk av at løysingane i boka er unødig tungvinte. Det kan ha ulike grunnar. Nokre løysingar er skrive for å byggja direkte på idéar frå oppgåvene før. Andre løysingar er skrive for å innføra idéar som generaliserer til vanskelegare problem. Kvar og ein må finna løysingsstrategiar som dei trur på. Der er ingen premie for å velja same løysingsstrategi som forfattaren. Ve den førelesaren som tenkjer slik.

Difor: *Dann studiegrupper*. Forklar problem og løysingar for kvarandre. Øv på å forklara slik at andre med liknande bakgrunn forstår. Vurder og kritiser svarforslag for kvarandre.

Kjelder

Niss and Højgaard [2011] skriv om åtte ulike matematikkompetansar, der symbol- og formelmanipulasjon berre er éin av dei. Thorvaldsen [2002] skriv om matematikkens kulturhistorie, og nemner mange av dei praktiske problema som har inspirert utviklinga i fleire tusen år. Pestalozzi var skulereformator i Sveits rundt 1800, og han peikte mellom anna på at den store avstanden mellom skulekvardagen og heimkvardagen var skulen si store ulukke. Hovudverket finst i ein lettlest, forkorta utgåve på engelsk [Pestalozzi, 1908]. Sæbø et al. [2015] skriv om favoriseringa av digitale tenkjarar i høgare utdanning, der kontekstuelle tenkjarar vert diskriminert.

Den oppgåvedrivne metodikken i boka er inspirert av Colburn [1822] og til dels Hendrix [1947], og vert gjerne kalla ein induktiv undervisningsmetode. Idéen med å bruka eksempel- og øvingsoppgåver i par er formalisert og systematisert av Clark et al. [2005].

1 Veke 1. Prosentrekning

For å få skikkeleg utbytte av øvingane, **hugs fylgjande**:

- Når de svarer på oppgåvene skal de svara slik at andre vert overtydd om at svaret er rett.
- Arbeid i grupper, og lær dykk til å forklara oppgåvene slik at alle forstår.
- Bruk OneNote eller andre verkty til dela skriftlege løysingsutkast i gruppa, i tillegg til munnleg diskusjon.
- Ta dykk tid til å finna gode måtar å samarbeida på.
- Dersom du kjenner at du treng fasit, arbeider du for lite med argumentasjon og forklaring i svara dine. Du må læra å kvalitetssikra eigne svar.
- Tenk på det konkrete problemet i oppgåva og forsikra deg om at det matematiske svaret er meiningsfullt i samanhengen.
- Nokre av oppgåvene er døme med løysingsforslag. Det er meininga at de skal bruka dei til å læra nye teknikkar.
- Spør om hjelp når de er usikre.
- Oppgåver merkte med † er ein smule vanskelegare enn dei andre. Det er venta at ikkje alle klarer desse oppgåvene. Det er greitt.
- Oppgåver merkte med $\star$ er meir av same type oppgåver. Det er heilt greitt å hoppa over desse oppgåvene for å rekkja over heile oppgåvesettet kvar veke.
- Det er viktig at alle kjem gjennom alle oppgåvene som ikkje er merkte †/$\star$ slik at me kan gå vidare veka etter.

1.1 Prosentdel

Eksempeloppgåve 1.1. I ein studie om sparing vert 200 studentar spurde om dei sparer i BSU (bustadsparing for ungdom). Av dei svarer 80 studentar ja. Kor stor prosentdel av studentane sparer i BSU?

Løysing 1.1. Delen av studentane som sparer i BSU, er

80 sparande studentar utav 200 studentar totalt,

som svarer til brøken

$$\frac{80}{200}.$$

Me kan skriva om brøken slik at me får 100 i nemnaren:

$$\frac{80}{200} = \frac{2 \cdot 40}{2 \cdot 100} = \frac{40}{100} = 40\%.$$

Prosent tyder det same som hundredelar, so 40 hundredelar, eller 40% av studentane sparer i BSU.

Øvingsoppgåve 1.2. I ein annan studie vert 1000 arbeidstakarar spurde om dei sparer til pensjon utover obligatorisk tenestepensjon. Av dei svarer 140 ja. Kor stor prosentdel av arbeidstakarane sparer til ekstra pensjon?

Eksempeloppgåve 1.3 ($\star$)**.** Av 135 studentar, strauk 53 til eksamen. Kor stor er strykprosenten?

Løysing 1.2. Strykdelen er 53 av 135, dvs.

$$\frac{53 \text{ studentar}}{135 \text{ studentar}} = \frac{53}{135} \approx 0{,}3926 = \frac{39{,}26}{100} = 39{,}26\%.$$

Strykdelen er altso 39,26%.

Øvingsoppgåve 1.4 ($\star$)**.** På ein annan eksamen var der 117 studentar og 12 av dei fekk A. Kor stor prosentdel fekk A?

Eksempeloppgåve 1.5. Der er 20,5% utanlandske studentar på masterstudiet. Totalt er der 117 studentar. Kor mange utlendingar studerer på studiet?

Løysing 1.3. Talet på utlendingar er 20,5% av 117, eller mao.

$$20{,}5\% \cdot 117 = 0{,}205 \cdot 117 = 23{,}985.$$

Sidan det her er tale om personar, må svaret vera eit heltal. Der er 24 utanlandske studentar på studiet.

Øvingsoppgåve 1.6. På hovudoppgåva fekk 14,8% av studentane A. Der var 88 studentar på studiet. Kor mange studentar fekk A?

1.2 Prosentvis endring

Eksempeloppgåve 1.7. Mjølka kosta 15kr. per liter i fjor, men prisen er auka med 3%. Kor mykje kostar mjølka no?

Løysing 1.4. Prisen er auka med 3% av 15kr., dvs. $15 \cdot 0{,}03$ kr. Me skriv (i kroner)

$$\text{nypris} = 15 + 3\% \cdot 15 = 15 + 15 \cdot 0{,}03 = 15 + 0{,}45 = 15{,}45.$$

Merknad 1.1. Merk at me ikkje skriv at nyprisen er $15 + 3\%$. Prosenter viser alltid til ein viss del av noko, og i matematisk notasjon må me skriva eksplisitt kva me tek ein prosentdel av: $15 + 3\% \cdot 15$. I vanleg språk er det lov å slurva litt. Når me skriv at prisen er 15kr. og aukar med 3%, so skjøner me (implisitt) at auka er 3% av 15kr.

Øvingsoppgåve 1.8. Kvitost brukte å kosta 90 kr. per kilo, men prisen er auka med 4%. Kor mykje kostar osten no?

Øvingsoppgåve 1.9 ($\star$)**.** Marta lånte 750 kroner i fjor. Etter eit år er der påløpt 5% rente. Kva er lånesaldoen (uteståande beløp) no?

Eksempeloppgåve 1.10. Konsulentselskapet *Gode råd A/S* har kostnader på 10 millionar kroner i 2017. Av kostnadane er 80% personalkostnader, 10% husleige, og 10% andre utgifter. I 2018 aukar husleiga med 5%. Dei andre kostnadene aukar ikkje. Kor mykje aukar dei totale kostnadene i prosent?

Løysing 1.5 (Forslag 1)**.** Lat oss fyrst rekna ut kostnadsauka i kroner. Husleiga h utgjer 10% av 10 millioner kroner (mkr), dvs.

$$h = \frac{10}{100} \cdot 10\text{mkr.} = 1\text{mkr.}$$

Me kaller endringa i husleiga for Δh. Ho auker med 5% av 1 mkr., dvs.

$$\Delta h = \frac{5}{100} \cdot 1\text{mkr.} = 0{,}05\text{mkr.}$$

Til slutt må me finna ut kor stor del auka på 0,05 mkr. utgjer av kostnadene på $k = 10$ mkr. Dvs.

$$\frac{\Delta h}{k} = \frac{0{,}05\text{mkr}}{10\text{mkr}} = \frac{0{,}05}{10} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}5\%.$$

Kostnadsauka er altso 0,5%.

Merknad 1.2. Bokstaven Δ (i Δh) over er gresk og heiter *delta*. Det er vanleg notasjon i matematikk å kalla ei endring i ein variabel x for Δx.

Løysing 1.6 (Forslag 2)**.** Kostnadsauka er på 5% av 10% av dei totale kostnadene. Denne auka, på 5% av 10%, kan skrivast som

$$\frac{5}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{50}{10000} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}5\%$$

av dei totale kostnadene. Kostnadsauka er altso 0,5% av dei totale kostnadene.

Merknad 1.3. Over har me fått to løysingsforslag. Forslag 2 er kortare og kan sjå enklare ut, men det er svært abstrakt. Me reknar med prostentdelar utan å skriva kva det er prosentdelar av. Mange vil finna det vanskeleg å verta overtydd om at svaret er rett, når argument er sopass abstrakt.

Forslag 1 reknar med kronar og vert difor meir konkret. Dette forslaget er betre egna til å overtyda ein lesar som ikkje er so god på prosentrekning. Om det trengst, kan ein vera endå grundingare og meir konkret, ved å setja opp alle kostnadene for to år i ein tabell,

Det er viktig at ein berre bruker forslag 2 dersom (1) ein veit at lesaren kan nok prosentrekning til å fylgja resonnementet, og (2) ein sjølv er god nok på abstrakt matematikk til å forvissa seg om at metoden er brukt rett. Sjølv om det er meir skriving skal ein rekna konkret dersom ein er i tvil.

Øvingsoppgåve 1.11. Gullsmed Syversen hadde eit varelager verd ein million kroner. Av dette var 70% sølvsmykker og 30% gullsmykker. I eit innbrot vart 75% av gullsmykkene stolne. Ingen av sølvsmykka vart stolne. Kor mykje tapte gullsmeden?

1. Kor mykje tapte han i kroner?
2. Kor mykje tapte han i prosent av verdien på varelageret?

Øvingsoppgåve 1.12 (†)**.** Investoren Bertin Vest har investert 30% av formuen i bankaksjar og 70% i oljeaksjar. I fjor tente han 10% av verdien på bankaksjane. Han korkje tapte eller tente pengar på oljeaksjane. Kor mykje tente han i prosent av den samla aksjeverdien?

1.3 Meirverdiavgift

Øvingsoppgåve 1.13. Meirverdiavgifta (mva) er eit påslag på 25% av prisen til seljaren. (Dette gjeld dei fleste varer, nokre varer, t.d. mat, har andre satsar.) Seljaren tek 300kr. for buksa (utan mva). Kor mykje må kjøparen betale for buksa (med mva)?

Eksempeloppgåve 1.14. Ein CD kostar 200kr. med mva. Kor mykje vert betalt til seljaren og kor mykje er mva?

Løysing 1.7 (Enkel løysing)**.** Prisen til seljaren er 100% og mva. er 25%. Totalprisen er då 125% som svarer til 200 kroner. Ein prosent er då $200/125 = 1{,}6$ kroner.

Prisen til seljare er 100% eller $1{,}6 \cdot 100 = 160$ kroner.

Mva-beløpet er $1{,}6 \cdot 25 = 40$ kroner.

Nedanståande løysingsforslag er meir tungvint, men det kan vera nyttig å ta med seg likevel. For det fyrste er det somme tider vanskeleg å verta overbevist om at det enkle resonnementet er korrekt (som løysinga over). For det andre illustrerer det korleis me kan matematisera problemet på ein måte som er overførbar til meir avanserte eller komplekse problem.

Løysing 1.8 (Med modellering)**.** Der er fleire måtar å løysa denne oppgåva på. Dersom ein er usikker på korleis ein skal gå fram, startar me med å matematisera den informasjonen me hev.

Prisen med mva. er oppgjeven, lat oss skriva $p_m = 200$. Spørsmålet gjeld to ukjende storleikar: prisen uten mva. p_u og mva. m. Kva veit me om samanhengane mellom desse tre storleikane?

I alle fall veit me at prisen med mva. er lik prisen utan + mva. Dvs.

$$p_m = p_u + m. \tag{1}$$

Dessutan veit me at mva. er 25% av prisen utan mva., dvs.

$$m = 0{,}25 \cdot p_u. \tag{2}$$

Det me har gjort so langt er å setja opp ein *modell* som viser samanhengane mellom pris og mva. For å setja opp modellen må me kombinera kunnskap om det praktiske problemet og matematikk, og me må tolka teksta i oppgåva. Når modellen er sett opp, har me ein rein matematisk, abstrakt formulering av problemet. Me seier at me har *matematisert* problemet.

No kan me setja inn for p_m og for m i likning (1):

$$200 = p_u + 0{,}25 \cdot p_u. \tag{3}$$

Dette er ein heilt ordinær likning med ein ukjend. Neste steg er å løysa modellen (likninga).

Me kan trekja saman på høgre side, og få

$$200 = 1{,}25 \cdot p_u. \tag{4}$$

Me kan dela med same tal på båe sider:

$$\frac{200}{1{,}25} = p_u, \tag{5}$$

eller $p_u = 160$. Prisen utan mva. er altso 160 kr.

For å finna mva. må me gå tilbake til modellen, i likning (2):

$$m = 0{,}25 \cdot p_u = 0{,}25 \cdot 160 = 40. \tag{6}$$

Meirverdiavgifta er altso 40 kr.

Øvingsoppgåve 1.15. Ei vare kostar 100 kr. med mva. Kor mykje får seljaren? Kor mykje vert betalt i mva?

Øvingsoppgåve 1.16 ($\star$). Ei vare kostar 100 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 1.17 ($\star$). Ei vare kostar 240 kr. med mva. Kor mykje får staten i mva?

Øvingsoppgåve 1.18 ($\star$). Ei vare kostar 240 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 1.19 ($\star$). Ei vare kostar 500 kr. med mva. Kor stor del av utsalsprisen er mva. (i prosent)?

Øvingsoppgåve 1.20 ($\star$). Ei vare kostar x kr. med mva., for ein eller annan ukjend x. Kor stor del av utsalsprisen er mva.?

1.4 Prosent og prosentpoeng

Eksempeloppgåve 1.21. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 219 personar at dei ville ha stemt Arbeidarpartiet, og i mai svarte 271 personar det same. Kor mykje har oppslutnaden auka i prosent?

Løysing 1.9. Endringa er $271 - 219 = 52$, som utgjer

$$\frac{52}{219} = 0{,}237\,44 = 23{,}7\%.$$

Øvingsoppgåve 1.22. Line har eit lån på 10 000 kroner. Ho betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor betalte hun 400 kroner i renter, og i år betalte ho 450 kroner. Kor mykje har renteutgiftene auka i prosent?

Øvingsoppgåve 1.23 ($\star$)**.** Line har eit lån på 10 000 kroner. Ho betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor betalte ho 400 kroner i renter, og i år betalte ho 450 kroner. Kva var rentesatsen i fjor (i prosent)? Kva er rentesatsen i år?

Øvingsoppgåve 1.24 ($\star$)**.** Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 200 personar at dei ville ha stemt Høgre, og i mai var det same talet 210.

1. Kva var prosentvis oppslutnad i april?
2. Kva var prosentvis oppslutnad i mai?
3. Kor mykje har oppslutnaden auka i prosent?

Eksempeloppgåve 1.25. Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I april svarte 4% at dei ville røysta KrF, og i mai var det same talet 3%.

1. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosent?
2. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosentpoeng?

Løysing 1.10. Oppslutnaden var 4% eller 4 prosentpoeng, og vart 3% eller 3 prosentpoeng. Det er ei endring på $3-4 = -1$ prosentpoeng, eller ei nedgang på eitt prosentpoeng.

Den prosentvise nedgangen er målt relativt til den gamle oppslutnaden på 4%, dvs.

$$\frac{1\,\text{prosentpoeng}}{4\,\text{prosentpoeng}} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Nedgangen er altso 25%, eller med forteikn, ei endring på -25%.

Merknad 1.4. Når renta aukar, t.d. frå 4% til 5%, seier me gjerne at auka er eitt prosentpoeng. Det er den absolutte endringa. Den relative (prosentvise) auka er 25%, sidan eitt prosentpoeng er 25% av den opprinnelege prosentsatsen på fire prosent(poeng).

Det same gjeld andre tilfelle der me måler i prosent. Me kan skildra den absolutte endringa i prosentpoeng, eller den relative endringa i prosent av den opprinnelege prosentsatsen.

Øvingsoppgåve 1.26. Det er fagfest på kjemistudiet. Dei har kjøpt inn fleire kasser cider som held 6% alkohol. Denne spritar dei opp. Labforsøk viser at den ferdige drikken held 9%.

1. Kor mykje har dei auka alkoholinnhaldet (alkoholkonsentrasjonen) i prosentpoeng?
2. Kor mykje har dei auka alkoholinnhaldet (alkoholkonsentrasjonen) i prosent?

Øvingsoppgåve 1.27 ($\star$)**.** Lars har eit lån på 100 000 kroner. Han betaler ikkje avdrag, berre renter. I fjor var rentesatsen 4%, og i år er han 3,5%. Kor mykje betalte Lars i renter i fjor, og kor mykje i år? Kor mykje har rentene endra seg i prosent?

Øvingsoppgåve 1.28 ($\star$)**.** Avisa gjer kvar månad ei meiningsmåling der dei spør 1000 personar kva dei ville ha stemt om det var valg dagen etter. I juni svarte 245 personar at dei ville ha stemt Arbeidarpartiet, og i juli var det same talet 210.

1. Kva var prosentvis oppslutnad i juni?
2. Kva var prosentvis oppslutnad i juli?
3. Kor mykje har oppslutnaden endra seg i prosent?

1.5 Vekstfaktor

Ei prisauke frå 10 kr. til 15 kr. kan skildrast på to måtar, anten *additivt* (med pluss) eller *multiplikativt* (med ganging):

$$15\text{kr} = 10\text{kr} + 5\text{kr} \tag{7}$$

$$15\text{kr} = 10\text{kr} \cdot 1{,}50 \tag{8}$$

Hittil har me arbeidd med additiv endring, anten me har skildra det som ei absolutt auke på 5kr. eller ei relativ auke på 50%.

Merk at me òg taler om additiv og multiplikativ endring om ei nedgang, t.d. frå 10kr. til 8kr.:

$$8\text{kr} = 10\text{kr} - 2\text{kr} \tag{9}$$

$$8\text{kr} = 10\text{kr} \cdot 0{,}80 \tag{10}$$

Faktorane 1,50 i (8) og 0,80 i (10) kallar me for *vekstfaktorar.*

Eksempeloppgåve 1.29. Sett at me set inn x kr. på bankkonto til 3% rente per år. Saldoen etter eitt år er då x kr. pluss $x \cdot 0{,}03$ kr. i renter, til saman $x + x \cdot 0{,}03$. Finn vekstfaktoren på bankkontoen.

Løysing 1.11. Legg merke til den felles faktoren x i uttrykket for saldoen (inneståande beløp på kontoen). Då kan me setja x utanfor ein parentes og få.

$$x + x \cdot 3\% = (x \cdot 1 + x \cdot 3\%) = (x \cdot 1 + x \cdot 0{,}03) = x \cdot (1 + 0{,}03).$$

Vekstfatoren er då $1 + 0{,}03$, eller penare skrive 1,03.

Merk at me ikkje treng å kjenna beløpet x for å finna vekstfaktoren.

Øvingsoppgåve 1.30. Bustadprisane har stige med 6,5% siste året. Kva er vekstfaktoren?

Øvingsoppgåve 1.31 ($\star$). Prisindeksen er stige frå 1200 til 1216 siste året. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen?

Løysing 1.12 (Utfyllingsforslag). Me løyser oppgåva i to steg.

1. Finn prosentvis auke. Prisindeksen har gått opp 16 poeng frå 1200 poeng. Kva er prosentvis auke?
2. Finn vekstfaktoren ut frå den prosentvise auka.

Fullfør kvart steg på eiga hand.

Eksempeloppgåve 1.32. Gjennomsnittleg kvadratmeterpris på nye bustader var 20 250 kr. i fjor. I år er prisen 20 010 kr. Kva er vekstfaktoren?

Løysing 1.13 (Tostegsløysing). Me ser ein prisnedgang på $20\,250 - 20\,010 = 240$ kr. Prosentvis nedgang er då

$$\frac{240}{20250} = 0.0119 = 1{,}19\%.$$

Me kan skriva den nye prisen som

$$20\,010 = 20\,250 - 0{,}0119 \cdot 20\,250 = (1 - 0{,}0119) \cdot 20\,250 = 0{,}988 \cdot 20\,250.$$

Vekstfaktoren er altso 0,988.

Løysing 1.14 (Likning). Me kan modellera auka direkte med den ukjend vekstfaktoren. Lat oss kalla vekstfaktoren for v. Auka er da modellert som

$$\text{nypris} = v \cdot \text{førpris},$$

eller

$$20\,010 = v \cdot 20\,250.$$

Dette er ei enkel fyrstegradslikning som me løyser ved å dela på førprisen:

$$\frac{20\,010}{20\,250} = v. \tag{11}$$

Divisjonen kan me ta på kalkulator, og me får at vekstfaktoren er $v \approx 0{,}9881$. Me ser ein prisnedgang på $20\,250 - 20\,010 = 240$ kr.

Øvingsoppgåve 1.33. Ola investerte 7500 kr. i aksjer i fjor. I år er porteføljen hans verd 6500 kr. Kva er vekstfaktoren på porteføljen hans?

Øvingsoppgåve 1.34 ($\star$). En cellekultur vog 200 gram i går. I dag veg han 350 gram. Kva er vekstfaktoren åt cellene?

Øvingsoppgåve 1.35 ($\star$). Kari investerte 9000 kroner i aksjefond i fjor. I år er andelen hennar verd 31 000 kr. Kva er vekstfaktoren på aksjefondet?

Merknad 1.5. Likning (11) i løysingsforslaget over er ofte brukt som definisjonen på *vekstfaktor*.

1.6 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.20.

Oppgåver: Bjørnestad *et al*, oppgåve 1.63.

2 Veke 2. Vekst

2.1 Påfylgjande prosentoperasjonar

Øvingsoppgåve 2.1. Prisen var 250 kr for to år sidan, men har auka med ein vekstfaktor på 1,1 to år på rad. Kva er prisen no?

Øvingsoppgåve 2.2. Buksa og jakka kostar 1000 kr kvar. Buksa gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Jakka gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Kor mykje kostar buksa og jakka no?

Eksempeloppgåve 2.3. Prisen var 200 kr for to år sidan, men har auka med ein vekstfaktor på 1,1 to år på rad. Kva er den samla vekstfaktoren over to år? Kva er samla prosentvis auke?

Løysing 2.1. Etter to år får me (i kroner)

$$\text{nypris} = 200 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \tag{12}$$

Me kan ganga faktorane i den rekkjefylgja me ynskjer. Me veit at $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$, og dermed har me

$$\text{nypris} = 200 \cdot 1{,}21 \tag{13}$$

Den samla vekstfaktoren er altso 1,21, og den prosentvise auka er 21%.

Merknad 2.1. Legg merke til korleis me bruker *multiplikasjon* med påfylgjande vekstfaktorar. Dette er viktig. Når me arbeider med vekstfaktor er det alltid multiplikasjon, og ikkje addisjon, og me skal sjå vidare at mange store og samansette problem vert enklare på denne måten.

Øvingsoppgåve 2.4. Du set inn 400 kroner på konto til 2% rente. Kva er vekstfaktoren? Kva er samla vekstfaktor over to år?

Øvingsoppgåve 2.5 ($\star$). Du set inn 1200 kroner på konto til 3% rente. Kva er samla prosentvis saldoauke over to år?

Øvingsoppgåve 2.6 ($\star$). Buksa og jakka kostar 1000 kr kvar. Jakka gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Buksa gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Kva er den samla prosentvise auka for jakka? For buksa?

Eksempeloppgåve 2.7. Prisauka i år er på 2%. Lønsmottakarane har fått lovnad om ein reallønsvekst på 1,5%. Kor mykje må lønningane auka nominelt?

Løysing 2.2. Rekninga i denne oppgåva er enkel, men det kan vera vanskelegare å verta overtydd om at me matematiserer riktig. Det kan difor vera nyttig å modellera svært omstendeleg.

For å vera konkret, lat oss seia at me ser på lønsauka for 2017 og 2018. Me taler gjerne om 2017-kroner og 2018-kroner for å skilja mellom verdien (kjøpekrafta) krona har på ulike tidspunkt. Når prisstiginga er 1,5%, tyder det at du treng 1,5% fleire 2018-kroner enn 2017-kroner for å ha same kjøpekraft.

Lat oss seia at løna var x 2017-kroner i 2017. Det er det same som $x \cdot 1{,}015$ 2018-kroner. For å ha null reallønsvekst, treng lønsmottakarane altso ei nominell lønsvekst på 1,5%.

No vil me auka kjøpekrafta med 2%. Dvs. at løna må auka frå $x \cdot 1{,}015$ 2018-kroner til $x \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02$ 2018-kroner. Dette kan forenklast som

$$x \cdot 1{,}015 \cdot 1{,}02 = x \cdot 1{,}0353.$$

Løna skal altso auka frå x 2017-kroner til $x \cdot 1{,}0353$ 2018-kroner, som gjev ei nominell lønsvekst på 3,53%.

Øvingsoppgåve 2.8. Prisauka i år er på 1,8%. Kor mykje må lønningane auka (nominelt) for å få null reallønsvekst?

Øvingsoppgåve 2.9 **($\star$).** Prisauka i år er på 1,5%, og lønsmottakarane krev 2,5% reallønsvekst. Kor stor må den nominelle lønsauka vera for å få det til?

Eksempeloppgåve 2.10. Sist år har lønningane stige 1%, men prisauka har vore 2%. Kor stor har reallønsveksten vore?

Løysing 2.3. Lat oss seia at lønninga i fjor var x 2017-kroner. Vekstfaktoren nominelt var 1,01. Me er interessert i den reelle vekstfaktoren, lat oss kalla han v.

Dersom me reknar med nominell løn, vert lønninga i år $x \cdot 1{,}01$ 2018-kroner. Med realløn, får me $x \cdot v$ 2017-kroner. Sidan ein 2017-krone er verd det same som 1,02 2018-kroner, kan me rekna realløna om til nominell løn, som gjev $x \cdot v \cdot 1{,}02$ 2018-kroner.

No har me to uttrykk for nominell løn etter auka, og dei må vera like

$$x \cdot 1{,}01 = x \cdot v \cdot 1{,}02.$$

Ved å dela på båe sider, får me

$$\frac{1{,}01}{1{,}02} = v.$$

Med kalkulator finn me at vekstfaktoren er 0,9902. Prosentvis reallønsauke er $v - 1 = -0{,}0098$ eller $-0{,}98\%$.

Negativt tal tyder her ein reallønsnedgang på 0,98%.

Øvingsoppgåve 2.11. Sist år har lønningane stige 2%, og prisauka har vore 1%. Kor stor har reallønsveksten vore?

2.2 Generelle observasjonar

Eksempeloppgåve 2.12. Sett at du set inn eit beløp x på bankkonto og får rente r per år i to år. Er det alltid slik at det totale rentebetalinga er større enn $2r$, uansett verdi på x og r?

Døme 2.1. Før me gjer oppgåva som han står, lat oss sjå på ein variant med konkrete tal.

Sett at du set inn 1000 kr. på bankkonto og får 10% rente per år i to år.

	Saldo inn	Rente	Saldo ut
År 1	1000	$10\% \cdot 1000 = 100$	$1000 + 100 = 1100$
År 2	1100	$10\% \cdot 1100 = 110$	$1100 + 110 = 1210$

Rentene på tusenlappen som du starta på utgjer 10% per år, eller 20% til saman. Det fyrste året har me berre fått den eine hundrelappen som utgjer 10%. Det andre året har me fått 10 kr. ekstra. Kvifor det?

Den ekstra tiaren er rentene på hundrelappen som me fekk året før. Dette utgjer 10% av 10% av 1000 kr. Mao. dei totale rentene me har fått er

$$2 \cdot 10\% + 10\% \cdot 10\% = 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}01 = 20\% + 1\%.$$

Den éine prosenten som me får ekstra kallar me gjerne for rentesrente, dvs. renter på renter.

Når me samanliknar med den opprinnelege oppgåva er $r = 10\% = 0{,}1$ og $x = 1000$.

Løysing 2.4. Dette problemet er lett å løysa med algebra. Både sparebeløpet x og rentesatsen r er ukjende, men me kan like fullt skriva $(1 + r)$ for vekstfaktoren, og for saldoen etter to år har me

$$y = x \cdot (1 + r)^2.$$

Kan me skriva potensuttrykket på andre måtar?

Me har

$$(1 + r)^2 = (1 + r)(1 + r) = 1 + r + r + r^2 = 1 + 2r + r^2.$$

Mao.

$$y = x \cdot (1 + 2r + r^2).$$

Den totale vekstfaktoren over to år er altso $1 + 2r + r^2$. Sidan $r^2 > 0$, vert altso den totale renteutbetalinga alltid større enn $2r$.

Merknad 2.2. Dersom den algebraiske løysinga er vond å forstå, prøv å samalikna ho med dømet over. Du kan godt skriva om dømet med vekstfaktor slik at det får den same strukturen som den algebraiske løysinga, og like gjerne omvendt, skriva om algbraen som ein tabell etter skjema frå dømet.

Det er heilt normalt at ein må studera døma frå fleire vinklar for å forstå det.

Rekneregel 2.1 Rekneregel: Multiplikasjon av parentesuttrykk

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{14}$$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \tag{15}$$

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d \tag{16}$$

Rekneregel 2.2 Rekneregel: Kvadratsetningane

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{17}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{18}$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \tag{19}$$

Merknad 2.3. Lat oss sjå litt nærare på saldoen etter to år. Skriv

$$y = x \cdot (1 + 2r + r^2) = x + x \cdot 2r + x \cdot r^2.$$

Her har me tre ledd. Det fyrste, x, er den opprinnelege saldoen. Det neste, $x \cdot 2r$ eller $2xr$ er rentene for to år. Det siste $x \cdot r^2$ vert kalla *rentesrenter*, dvs. rentene me får andre året på rentene som vart lagt til fyrste året.

Øvingsoppgåve 2.13. Sett at prisen på ein vare går opp med r prosent eit år, og ned r prosent året etter. Kva er den samla endringa over to år, i prosent?

Øvingsoppgåve 2.14. Produkt A gjekk opp 2% i fjor, og ned 4% i år. Produkt B gjekk ned 4% i fjor, og opp 2% i år. Me veit ikkje kva produkta kosta i utgangspunktet. Kva produkt har gått (prosentvis) mest ned i pris samanlagt over desse to åra, eller har dei gått like mykje ned?

Øvingsoppgåve 2.15 ($\star$)**.** Løys fylgjande oppgåver frå læreboka: 1.2, 1.3, 1.5, 1.18.

2.3 Årleg prosentvekst

Eksempeloppgåve 2.16. Sett at me set inn 100 kr. på bankkonto til 5% rente per år. Kva er saldoen etter to år? Kva er saldoen etter fire år?

Løysing 2.5. Det er lett å sjå kva som skjer når me set opp utrekningane år for år i ein tabell. Alle beløpa er i kroner.

År	Saldo	Rente	Ny saldo
1	100	$100 \cdot 5\% = 5$	$100 + 5 = 105$
2	105	$105 \cdot 5\% = 5{,}25$	$105 + 5{,}25 = 110{,}25$
3	110,25	$110{,}25 \cdot 5\% = 5{,}5125$	$110{,}25 + 5{,}5125 = 115{,}7625$
4	115,7625	$115{,}7625 \cdot 5\% \approx 5{,}7881$	$115{,}7625 + 5{,}7881 = 121{,}5506$

Saldoen er altso 110,25 kroner etter to år og 121,55 kroner etter fire år.

Merknad 2.4. Kor mange desimaler ein skal ta med avheng av samanhengen. Her har me brukt to desimalar i sluttsvaret som er vanleg for kronebeløp, og to desimalar ekstra i mellomrekningane for å unngå at fleire små avrundingsfeil til saman vert ein stor feil.

Øvingsoppgåve 2.17. Eit par bukser kostar 1000kr. Prisen aukar med 10% per år. Kva er prisen etter to år? Og etter tre år?

Eksempeloppgåve 2.18 (Sparekonto⋆)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. ved starten av året. Kva er saldoen etter ...

1. eitt år?
2. tre år?
3. ti år?

Løysing 2.6 (Fyrste forsøk)**.** Det er enkelt og oversiktleg å setja opp ein tabell over renter og saldo på kontoen år for å, t.d. slik:

År	Saldo 1. januar	Rente	Ny saldo
1	1000 kr.	$1000 \cdot 0{,}03 = 30$ kr.	1030 kr.
2	1030 kr.	$1030 \cdot 0{,}03 = 30,90$ kr.	1060,90 kr.
3	1060,90 kr.	$1060{,}90 \cdot 0{,}03 \approx 31{,}83$ kr.	1092,73 kr.
4	1092,73 kr.	$1092{,}73 \cdot 0{,}03 \approx 32{,}78$ kr.	1125,51 kr.
5	1125,51 kr.	$1125{,}51 \cdot 0{,}03 \approx 33{,}77$ kr.	1159,28 kr.
6	1159,28 kr.	$1159{,}28 \cdot 0{,}03 \approx 34{,}78$ kr.	1194,06 kr.
7	1194,06 kr.	$1194{,}06 \cdot 0{,}03 \approx 35{,}82$ kr.	1229,88 kr.
8	1229,88 kr.	$1229{,}88 \cdot 0{,}03 \approx 36{,}90$ kr.	1266,78 kr.
9	1266,78 kr.	$1266{,}78 \cdot 0{,}03 \approx 38{,}00$ kr.	1304,78 kr.
10	1304,78 kr.	$1304{,}78 \cdot 0{,}03 \approx 39{,}14$ kr.	1343,92 kr.

Dersom ein berre er interessert i nokre få år, er det raskt og enkelt å rekna ut 3% rente og ny saldo for hand. Same tabell kan setjast opp i eit rekneark, for dei som ikkje orkar å rekna for hand.

Løysing 2.7 (Med vekstfaktor)**.** I det fyrste forsøket rekna me ut additiv auke for kvart år. No skal me fokusera på vekstfaktoren i staden. Ny saldo er gjeve som

$$S = S_{\text{fr}} + 3\% \cdot S_{\text{fr}} = 1{,}03 \cdot S_{\text{fr}},$$

og denne formelen gjeld kvart år. Litt omstendeleg kan me setja opp tabellen slik:

År	Saldo 1. januar	Ny saldo
1	1000 kr.	$1000 \cdot 1{,}03 = 1030{,}00$ kr.
2	1030 kr.	$1030 \cdot 1{,}03 = 1060{,}90$ kr.
3	1060,90 kr.	$1060{,}90 \cdot 1{,}03 = 1092{,}73$ kr.
4	1092,73 kr.	$1092{,}73 \cdot 1{,}03 = 1125{,}50$ kr.
5	1125,51 kr.	$1125{,}51 \cdot 1{,}03 = 1159{,}28$ kr.
6	1159,27 kr.	$1159{,}28 \cdot 1{,}03 = 1194{,}06$ kr.
7	1194,05 kr.	$1194{,}06 \cdot 1{,}03 = 1229{,}88$ kr.
8	1229,87 kr.	$1229{,}88 \cdot 1{,}03 = 1266{,}78$ kr.
9	1266,77 kr.	$1266{,}78 \cdot 1{,}03 = 1304{,}78$ kr.
10	1304,77 kr.	$1304{,}78 \cdot 1{,}03 = 1343{,}92$ kr.

Merknad 2.5. Legg merke til at me kan skriva alle dei ti multiplikasjonane på ei line, slik at saldoen etter ti år er

$$S = 1000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03.$$

Dette kan me skriva som ein potens, slik at

$$S = 1000 \cdot 1{,}03^{10}.$$

Øvingsoppgåve 2.19 ($\star$)**.** Prisindeksen var 1200 for åtte år sidan, og har auka med 2% kvar år sidan det. Kva er prisindeksen i år?

2.4 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al* (8. utgåve), kapittel 1.21.

Øvingsoppgåve 2.20 (†)**.** Bjørnestad *et al* (8. utgåve), oppgåve 1.67.

3 Veke 3–4. Eksponentialfunksjonen

Dette kapittelet er stort, medan neste kapittel er kort. Me må vurdera undervegs kor mykje me rekk over denne veka, og kor mykje me skyv over til neste.

Foilar: Introduksjon til eksponentialfunksjonen

3.1 Eksponentialfunksjonen

Eksempeloppgåve 3.1 (Sparekonto)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. ved starten av året. Kva er saldoen etter ...

1. 100 år?
2. t år?

Løysing 3.1. Me ser av oppgåve 3.1, at me gongar med vekstfaktoren ein gong for kvart år som går. Saldoen etter eitt år er

$$S_1 = 1000 \cdot 1{,}03.$$

Etter to år er han

$$S_2 = 1000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1000 \cdot 1{,}03^2.$$

Etter tre år er han

$$S_2 = 1000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}03 = 1000 \cdot 1{,}03^3.$$

Dette mynsteret held fram slik at me kan skriva saldoen etter t år som

$$S_t = 1000 \cdot 1{,}03^t.$$

Etter 100 år har me $t = 100$, og kan skriva

$$S_{100} = 1000 \cdot 1{,}03^{100} \approx 19\,218{,}63.$$

Merk at dette òg gjeld etter null år ($t = 0$), fordi

$$S_0 = 1000 \cdot 1{,}03^0 = 1000 \cdot 1 = 1000.$$

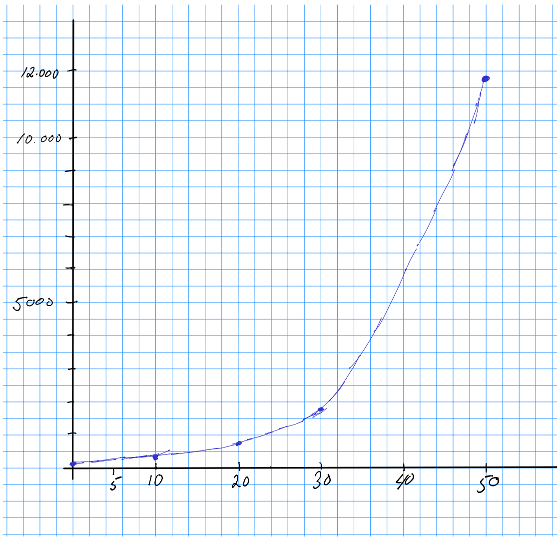
Øvingsoppgåve 3.2. Kari har ein sparekonto med 2,5% rente. Ho set inn 2000 kr. Kva er saldoen etter 50 år?

Øvingsoppgåve 3.3 ($\star$)**.** Bente låner 20 000 kr. til ferie, med 10% rente per år. Ho skal betala tilbake heile lånet om fem år, med renter. (Rentene vert lagt til lånet ved utgangen av kvart år.) Kor mykje må ho betala?

Eksempeloppgåve 3.4. Tenk deg at du set inn 100 kr. i banken til 10% rente. Saldoen etter t år er gjeven ved funksjonen $S(t) = 100 \cdot 1{,}1^t$. Korleis utvikler saldoen seg over lang tid? Plott funksjonen som ei kurve. (Du kan velja om du vil teikna for hand eller bruka datamaskin eller kalkulator.)

Løysing 3.2. Det er greitt å plotta for hand. Me reknar ut eit par verdiar for $S(t)$ med kalkulator, plottar punktane etter beste skjønn, og teiknar kurva på frihand. Dette er nøyaktig nok til å sjå korleis eksponentialfunksjon veks raskare og raskare når t aukar.

t	$100 \cdot 1{,}1^t$
0	100
10	259,3742
20	672,7500
30	1744,9402
50	11 739,0853



Merknad 3.1. Dersom du vil plotta på maskin, og ikkje har egna programvare installert, so kan Wolfram Alpha vera eit godt alternativ. For å løysa oppgåva over i Wolfram Alpha, skriv:

```
plot 100*1.1^t for t=0...50
```

Elles kan du like gjerne bruka programvare eller kalkulator som du kjenner frå før.

Øvingsoppgåve 3.5. Tenk deg at du set 1000 kr. i aksjefond og får 25% avkasting. Verdien av innskotet etter t år er gjeve ved funksjonen $S(t) = 1000 \cdot 1{,}25^t$. Plott verdiutviklinga som ei kurve. (Du kan velja om du vil teikna for hand eller bruka datamaskin eller kalkulator.)

Definisjon 3.1. Ein funksjon på formen $f(t) = c \cdot a^t$ vert kalla ein *eksponentialfunksjon.*

Øvingsoppgåve 3.6. Lag eit plot for å samanlikna verdiutviklinga med 1%, 5% og 10% rente. Lat startverdien vera 1000 kroner.

Øvingsoppgåve 3.7. Lag eit plot som samanliknar funksjonane $f(x) = 1.2^x$ og $g(x) = x^2$ for $x = 0 \ldots 50$.

Øvingsoppgåve 3.8. Bruk plottet i forrige oppgåve til å finna omtrentleg x-verdi slik at $1.2^x = x^2$.

3.2 Verditap

Eksempeloppgåve 3.9. Akskjefondet *Nye marknader* har gått dårleg dei siste åra. Verdien har falt med 10% kvart år. Teodor investerte 200 000 kroner for åtte år sidan. Kor mykje er parten hans verd i dag?

Løysing 3.3. Eit verditap på 10% er det same som vekst på −10% eller −0,1. Dette gjev ein vekstfaktor $v = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Verdien på fondsandelen etter t år er då $200\,000 \cdot 0{,}9^t$. No, etter åtte år, er verdien

$$200\,000 \cdot 0{,}9^8 \approx 86\,093{,}44.$$

Parten hans er verd 86 093,44 kroner.

Øvingsoppgåve 3.10. Johnny har kjøpt ein bil til 600 000 kr. Bilen fell 15% i verdi kvart år. Kor mykje er bilen verd etter sju år?

Øvingsoppgåve 3.11. Tenk deg ein fondsandel på 1000 kroner. Lag eit plot for å samanlikna verdiutviklinga når verdien fell med 1%, 5% eller 10% per år.

Dersom du plottar på maskin, kan du godt prøva ulike interval på x-aksa, både $[0 \ldots 25]$ til $[0 \ldots 1000]$.

3.3 Kortare renteperiodar

Eksempeloppgåve 3.12. Jonas låner 10 000 kr. til ny bærbar datamaskin med 12% nominell rente per år. Renta vert lagt til månadsvis, dvs. ein tolvtedel av 12% vert lagt til lånet kvar måned. Etter fire år skal han betala alt tilbake. Kor mykje må han betala?

Løysing 3.4. Sjølv om renta er oppgjeve pro anno (per år), må me rekna med månader. Månadleg rente er $12\%/12 = 1\%$. Vekstfaktoren er dermed 1,01. Pengane står til forrenting i fire år, eller $4 \cdot 12 = 48$ månader. Lånesaldoen som han må gjera opp etter fire år er mao.

$$10\,000 \cdot 1{,}01^{48} \approx 16\,122{,}26.$$

Øvingsoppgåve 3.13. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet to gongar i året. Etter fem år skal ho betala alt tilbake. Kor mykje må ho betala?

Øvingsoppgåve 3.14. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet fire gongar i året (kvart kvartal). Etter fem år skal ho betala alt tilbake.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre enn i oppgåve 3.13 med halvårleg rente?

2. Rekn ut kor mykje ho må betala?

Øvingsoppgåve 3.15. Lise låner 5000 kr. til 10% nominell rente per år. Renta vert lagt til lånet éin gong i året. Etter fem år skal ho betala alt tilbake.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre enn i oppgåve 3.13 med halvårleg rente?
2. Rekn ut kor mykje ho må betala?

3.4 Effektiv rente

Eksempeloppgåve 3.16. Lat oss samanlikna eit lån med 12% rente p.a. og kvartalsvis forrenting med eit lån med årleg forrenting. Båe låna er på 1000 kr. Kva må rentesatsen på sistnemnde lån vera for at saldoen skal vera den same etter eitt år?

Løysing 3.5. Renta er 12% p.a. svarer til 3% per kvartal. Me kan tabellføra renteutgiftene kvartal for kvartal slik som me har gjort år for år i tidlegare oppgåver.

Periode	Gamal saldo	Rente	Ny saldo
1. kvartal	1000 kr.	30 kr.	1030 kr.
2. kvartal	1030 kr.	30,90 kr.	1060,90 kr.
3. kvartal	1060,90 kr.	$\approx$ 31,83 kr.	1092,73 kr.
4. kvartal	1092,73 kr.	$\approx$ 32,78 kr.	1125,51 kr.

Etter eitt år er lånesaldoen vakse til 1125,51 kr., dvs. ei endring på 125,51 kr. Av den opprinnelege saldoen utgjer dette

$$\frac{125{,}51}{1000} = \frac{12{,}551}{100} = 12{,}551\%.$$

Mao. med årleg forrenting måtte rentesatsen ha vore 12,551% for å gje same saldo etter eit år.

Øvingsoppgåve 3.17. Sett at du treng eit lån på 5000 kr. Lat oss samanlikna to lån. Det eine har halvårleg forrenting med 8% rente p.a. nominelt. Det andre lånet har med årleg forrenting. Kva må rentesatsen på sistnemnde lån vera for at saldoen skal vera den same etter eitt år?

Definisjon 3.2. Oppgåva over spør om *effektiv rente*. Den oppgjevne renta per år er den nominelle renta, men som me har sett avheng den reelle kostnaden av kor ofte rentene vert lagt til lånet. Den effektive renta er den rentesatsen som gjev same kostnad, med årleg, etterskotsvis forrenting.

Øvingsoppgåve 3.18. Sjå på eit lån med månadleg forrenting og 12% rente p.a. Kva er den effektive renta? Speler det noka rolle kor stort lånebeløpet er?

3.5 Kontinuerleg forrenting†

Eksempeloppgåve 3.19. Sjå på eit lån med 10% nominell rente per år. Me har sett at lånet veks raskare di oftare forrentinga skjer. Kor ofte går det an å forrenta? Kva er den høgaste vekstfaktoren me kan få ved å forrenta *uendeleg* ofte.

Løysing 3.6. Sei at me har n renteperiodar per år. Kvar periode vert $(10/n)\%$ lagt til lånet. Det svarer til ein vekstfaktor på

$$1 + \frac{0{,}1}{n}.$$

I løpet av året gongar me med vekstfaktoren n gongar, slik at den samla vekstfaktoren vert

$$v(n) = \left(1 + \frac{0{,}1}{n}\right)^n.$$

Lat oss sjå på nokre verdiar av n og rekna ut med kalkulator.

Frekvens	n	$v(n)$
Årleg	1	1,1
Månadleg	12	1,104 713
Vekentleg	52	1,105 065
Dagleg	365	1,105 156
Kvar time	8760	1,105 170
Kvart minutt	525 600	1,105 171
Kvart sekund	31 536 000	1,105 171

Øvingsoppgåve 3.20. Sjå på eit fond som veks med 100% nominell rente per år, og samanlikna ulike renteperiodar. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

Løysing 3.7 (Utfylling)**.** Me har n renteperiodar per år, og kvar gong legg med til $(100/n)\%$ eller $1/n$ på lånet. Det svarer til ein vekstfaktor på

$$1 + \frac{1}{n},$$

Når me gangar med den same vekstfaktoren n gongar, ver den samla vekstfaktoren

$$v(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Fyll inn resten av tabellen med verdiar for $v(n)$

Frekvens	n	$v(n)$
Årleg	1	2
Månadleg	12	
Vekentleg	52	
Dagleg	365	
Kvar time	8760	
Kvart minutt	525 600	
Kvart sekund	31 536 000	2,718 28

Merknad 3.2. Talet som me nærmar oss i løysinga over, har fått namnet e, og $e \approx 2{,}718\,28$. Formelt definerer me e slik at når $n \to \infty$ (når n går mot uendeleg), so vil

$$v(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

dvs. går $v(n)$ mot e. I løysinga over har me funne korrekt verdi for e med fem desimalar.

Øvingsoppgåve 3.21. Sjå på eit fond som veks med 20% nominell rente per år, og samanlikna ulike renteperiodar. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

Øvingsoppgåve 3.22. Aksjefondet *Bravur* har gått so det suser, med ei verdiauke på 250% per år. Tenk deg ulike periodiseringar av verdiauka. Kva er den høgaste årlege vekstfaktoren du finn ved å forrenta *uendeleg* ofte?

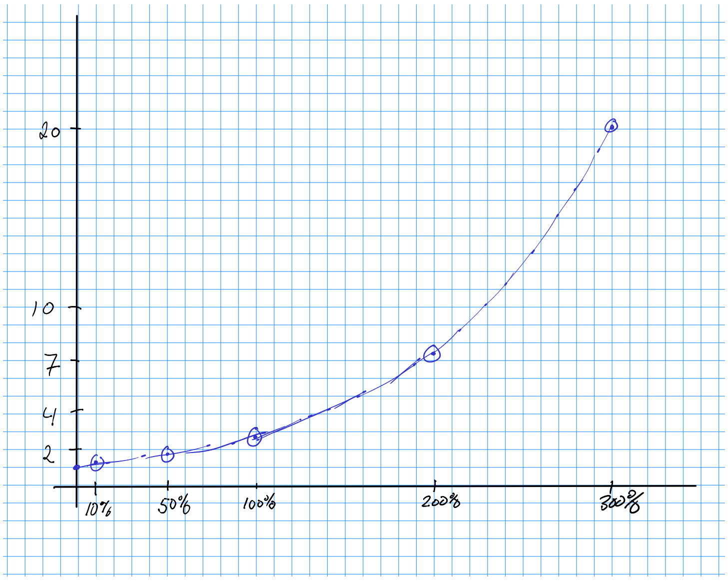
Merknad 3.3. Det som me har kalt «forrenting uendeleg ofte» i oppgåvene over, vert kalla *kontinuerleg forrenting* i fagspråket.

Eksempeloppgåve 3.23. Ved å gjenta oppgåvene over, kan me finna omtrentleg årleg vekstfaktor ved koninuerleg forrenting for ulike rentesatsar.

Rentesats	Vekstfaktor
300%	20,086
200%	7,389
100%	$e \approx 2{,}718$
50%	1,649
10%	1,105
0%	1

Plott samanhengen mellom rentesats og vekstfaktor. Korleis vil du beskriva denne samanhengen?

Løysing 3.8. Me kan teikna plottet for hand, og få:



Denne kurva liknar på eksponentialfunksjonane som me har plotta i oppgåve 3.4. Dette ville ha vore enno tidlegare om me hadde teke med punkt for 400% og større. Det er likevel naturleg å gissa på at vekstfaktoren er lik e^r der r er rentesatsen.

Øvingsoppgåve 3.24. I løysinga fremja me ein hypotese, om at årleg vekstfaktor v ved kontinuerleg forrenting med rentesats r, er gjeven som $v = e^r$. Sjekk om denne samanhengen gjeld for dei vekstfaktorane som er rekna ut i oppgåve 3.23.

Løysing 3.9 (Utfylling).

Rentesats	Vekstfaktor	r	$v = e^r$	Lik
300%	20,086	3	20,086	Ja
200%	7,389		7,389	
100%	$e \approx 2{,}718$			
50%	1,649	0,5		
10%	1,105			
0%	1			

Finn du noko tilfelle der $v = e^r$ ikkje er lik vekstfaktoren?

Merknad 3.4. Me legg merke til at me kan rekna ut potensen e^r utan at r er eit heiltal, i alle fall når me bruker kalkulator. Funksjonen a^x er pen og glatt for alle ikkje-negative verdiar av a og alle verdiar av x.

Øvingsoppgåve 3.25. Sjekk om $v = e^r$ er riktig vekstfaktor for problema som du løyste i oppgåve 3.21 og 3.22.

Merknad 3.5. Når me har kontinuerleg forrenting med rentesats r, so er samla årleg vekstfaktor lik e^r.

Eksempeloppgåve 3.26. Ei investering på ein million kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 10% i fem år. Kva er saldoen på slutten av kvart år i perioden?

Løysing 3.10. Lat oss setja det opp som ein tabell år for år. Vekstfaktoren er $e^{0,1}$. Tala er i millionar kroner.

År	Saldo
1	$1 \cdot e^{0,1} = 1{,}105$
2	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^2 = 1{,}221$
3	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^3 = 1{,}350$
4	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^4 = 1{,}492$
5	$1 \cdot \left(e^{0,1}\right)^5 = 1{,}649$

Øvingsoppgåve 3.27. Ei investering på 5000 kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 20% i fem år. Kva er saldoen på slutten av kvart år i perioden?

Merknad 3.6. Merk at e^r er den årlege vekstfaktoren ved kontinuerleg forrenting, og når fleire år går, gangar me (som vanleg) med same vekstfaktor for kvart år.

Øvingsoppgåve 3.28. Ei investering på 5000 kroner veks med kontinuerleg forrenting og rentesats 20%. Kva er saldoen etter $2\frac{1}{2}$ år?

Merknad 3.7. Over har me funne ein formel for kontinuerleg forrenting. Når ein startkapital K_0 veks med kontinuerleg forrenting med rentesats r, er kapitalen etter t år gjeven som

$$K(t) = K_0 \cdot \left(e^r\right)^t.$$

Dette kan forenklast som

$$K(t) = K_0 \cdot e^{rt}.$$

Dette fylgjer av potensreglane, men dei lyt ein slå opp andre plassar.

3.6 Noverdi

Eksempeloppgåve 3.29. Du skal halda brudlaup i januar 2020, og treng 50 000 kr. til festen då. Du set av pengar til festen allereie i desember 2018, slik at dei står på konto i eitt år til 2,5% rente. Kor mykje må du setja inn?

Løysing 3.11. Som vanleg kan me setja opp ein modell som viser samanhengen mellom pengar no, og pengane når me skal bruka dei. Lat oss skriva S_0 for summen me set inn i desember 2018, og S_1 for saldoen me kan ta ut i januar 2020.

Me har to opplysingar som me kan bruka i modellen. For det fyrste er S_1 lik S_0 pluss rentene, dvs.

$$S_1 = S_0 \cdot 1{,}025.$$

For det andre er $S_1 = 50\,000$. Det er nok informasjon til ei likning med ein ukjend:

$$50\,000 = S_0 \cdot 1{,}025.$$

Her løyser me ved å dela på 1,025, og me får

$$\frac{50\,000}{1{,}025} = S_0.$$

Reknar me ut brøken på kalkulator, får me at me må setja inn er 48 780,49 kr.

Øvingsoppgåve 3.30. Du skal arrangera ein stor festival om eitt år og treng ein million kroner til arrangementet. Du samlar inn pengar eit år på førehand og set dei på konto til 3% rente. Kor mykje må du setja inn? (Me føreset at perioden går nyttår til nyttår, slik at du får alle rentene med i utbetalinga.)

Definisjon 3.3. Dei to siste oppgåvene spør etter det som me kaller *noverdi*. Den summen du må setja av no, for å få eit visst beløp på eit visst tidspunkt i framtida med renter, er *noverdien* til beløpet. Når me reknar ut noverdien, taler me gjerne om *diskontering*, og rentesatsen vert gjerne *diskonteringsrente*. Vekstfaktoren $\frac{1}{1+r}$ kan me kalla *diskonteringsfaktoren*.

Når me reknar om frå framtidsverdi til noverdi, seier me at me *diskonterer*.

Eksempeloppgåve 3.31. Du planlegg eit innovasjonsprosjekt, som er venta å resultere i eit patent med ein marknadsverdi på 100 millionar kroner om fem år. Kva er noverdien til eit slikt patent når diskonteringsrenta er 4%?

Løysing 3.12. Som før kan me tenkja oss at noverdien S_0 står til forrenting (i banken) i fem år til 4% rente. Den framtidige verdien er $S_5 = 100$ mNOK. Me har altso

$$S_5 = 100 \quad \text{og} \quad S_5 = S_0 \cdot 1{,}04^5,$$

eller

$$100 = S_0 \cdot 1{,}04^5.$$

Ved å dela på båe sider, får me

$$\frac{100}{1{,}04^5} = S_0.$$

Me kalkulatoren $S_0 = 82{,}19$. Noverdien er altso 82,19 millionar kroner.

Øvingsoppgåve 3.32. Martin er 47 år og vil teikna ei livforsikring som skal gje han ei eingongsutbetaling 500 000 kr. når han er 67 år. Diskonteringsrenta er 4%. Kva er noverdien på denne eingongsutbetalinga?

3.7 Kontinuerleg diskontering†

Merk at dette byggjer på avsnitt 3.5.

Øvingsoppgåve 3.33. På same måte som me kan forrenta fleire gongar per år, kan me diskontera fleire gongar per år. Ta utgangspunkt i ein diskonteringsrente på 10% per år. Rekn ut kva den samla diskonteringsfaktoren over eit år vert dersom du diskonterer kvar månad, veke, dag, osv. Rekn òg ut vekstfaktoren for noverdien.

Løysing 3.13 (Utfylling). Sei at me har n diskonteringsperiodar per år. Kvar periode har ein diskonteringsfaktor på

$$\big(1 + \frac{0{,}1}{n}\big).$$

Samla over året vert diskonteringsfaktoren

$$d(n) = \big(1 + \frac{0{,}1}{n}\big)^n.$$

Noverdien av eit beløp K utbetalt om eit år, er då

$$K_0 = K \cdot \frac{1}{d(n)},$$

dvs. vekstfaktoren er $v(n) = \frac{1}{d(n)}$.

Frekvens	n	$d(n)$	$v(n)$
Årleg	1	1,1	$\frac{1}{1{,}1} = 0{,}9091$
Månadleg	12	$\big(1 + \frac{0{,}1}{12}\big)^{12} = \cdots$	$1/1{,}1047 = \cdots$
Vekentleg	52		
Dagleg	365		
Kvar time	8760		
Kvart minutt	525 600		
Kvart sekund	31 536 000		

Merknad 3.8. På same måte som vekstfaktoren ved kontinuerleg forrenting og rentesats r er e^r, er diskonteringsfaktoren ved kontinuerleg diskontering og diskonteringsrente r òg e^r. Noverdien av eit beløp K om t år er då

$$K_0 = K \cdot \frac{1}{e^{rt}}.$$

3.8 Andre modellar med eksponentialfunksjonar†

Eksempeloppgåve 3.34. Ein bakteriekultur med ein viss type bakteriar doblar massen sin kvar sjette time. Massen på starttidspunktet er éin gram. Gjev eit funksjonsuttrykk for massen etter t timar.

Løysing 3.14. Ein periode her er på seks timar. I løpet av t timar skjer doblinga $t/6$ gongar. Dobling tyder ein vekstfaktor på 2. Etter t timar ($t/6$ periodar) er dermed massen lik $m(t) = 1 \cdot 2^{t/6}$.

Øvingsoppgåve 3.35. Sjå igjen på bakteriekulturen i oppgåve 3.34.

1. Kor stor er massen etter eitt døger (24 timar)?
2. Kor stor er massen etter éin time?

Øvingsoppgåve 3.36. Det radioaktive stoffet radon-222 har ei halveringstid på 3,82 dagar. Dvs. at dersom du startar med m_0 kg radon-222, har du $m_0/2$ kg att etter 3,82 dagar. Skriv eit funksjonsuttrykk for massen $m(t)$ med radon-222 som du har att etter t dagar.

Øvingsoppgåve 3.37. Radon-222 har som sagt ei halveringstid på 3,82 dagar. Du hadde ein kg radon-222 for 24 timar sidan. Kor mykje har du no?

Øvingsoppgåve 3.38. Kalium-42 har ei halveringstid på 12 timar. Kor lang tid går det før ein kilo kalium-42 er redusert til ein gram (0,001 kg)?

3.9 Vidare lesing

Stoffet i dette kapittelet er dekt i Bjørnestad *et al.* kapittel 4.1–4.2, men då i ei meir omfattande og abstrakt framstilling. Me skal koma tilbake til eksponential- og algoritmefunksjonen seinare i kurset, og lærebokframstillinga kan venta til då.

Øvingsoppgåve 3.39 (†). Bjørnestad *et al.*: oppgåve 1.8, 1.15(a-d), 1.35, 4.1, 4.2, (4.7)

4 Veke 4. Logaritmar

4.1 Logaritmefunksjonen

Eksempeloppgåve 4.1. Ola set 100kr. i banken til 2% rente p.a. (per år). Kor mange år tek det før saldoen er fordobla?

Løysing 4.1. Me veit at saldoen hans Ola etter t år er

$$S(t) = 100 \cdot 1{,}02^t. \tag{20}$$

Me har brukt den same modellen i fleire oppgåvetypar. Det nye er at det er t som er ukjend, medan saldoen både før og etter perioden er kjend.

Lat oss no definera t som tida det tek å dobla saldoen, dermed har me

$$S(t) = 2 \cdot 100 = 200. \tag{21}$$

Dei to likningane (20) og (21) gjev to uttrykk for den same storleiken $S(t)$, og me kan setja dei saman i ei likning:

$$100 \cdot 1{,}02^t = 200. \tag{22}$$

Likninga må forenklast, og me gjer dei enklaste forenklingane fyrst. Me kan dela båe sidene på 100, og få

$$\frac{100 \cdot 1{,}02^t}{100} = \frac{200}{100}.$$

eller

$$1{,}02^t = 2.$$

No har me eksponentialfunksjonen aleine på venstre side. For å forenkla ytterlegare, treng me ein ny funksjon, *logaritmefunksjonen* ln. Me skal koma tilbake til eigenskapene som logaritma har sidan, men me kan bruka ln her vha. ein enkel regel og kalkulator.

Me kan skriva

$$\ln 1{,}02^t = \ln 2.$$

Når me bruker same funksjon på båe sidene i ei likning, må likskapen framleis halda. No bruker me logaritmeregelen (rekneregel 4.1) for å setja t-en utanfor, slik at

$$t \ln 1{,}02 = \ln 2.$$

Ved å dela på båe sidene, kan me få t-en aleine

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02}.$$

Rekneregel 4.1 Logaritma av ein potens

$$\ln a^x = x \ln a$$

Logaritmefunksjonen finn du på kalkulatoren, og me kan rekna ut og få

$$t \approx \frac{0{,}693}{0{,}0198} \approx 35{,}003.$$

Sidan Ola berre får renter éin gong i året, bør svaret vera eit heiltall. Her fekk me so vidt over 35 år. Dvs. at saldoen er *nesten* dobla etter 35 år. Fyrst etter 36 år er saldoen passert 200kr., og rett svar når me ser på det praktiske problemet bør difor vera 36 år. I den matematiske modellen er tilnærma 35 år rett svar, men det er altso litt upresist i røynda.

Øvingsoppgåve 4.2. Kari har ein konto med 3% rente. Ho set inn 400 kr. Kor mange år tek det før saldoen er 1000 kr?

Øvingsoppgåve 4.3. Filip set inn eit beløp på konto til 2% rente. Kor lang tid tek det før beløpet er fordobla? Speler det noka rolle kor stort startbeløpet er?

Øvingsoppgåve 4.4. Karl tek opp eit lån på 2000 kr. til 3% rente p.a. Renta vert lagt til kvartalsvis (kvar tredje månad). Kor lang tid tek det før lånesaldoen er 3000kr.?

Løysing 4.2 (Fasit)**.** Mogleg svar er 13 år og ni månader.

Øvingsoppgåve 4.5 (*)**.** Karl tek opp eit lån på 2000 kr. til 3% rente p.a. med månadleg forrenting. Kor lang tid tek det før lånesaldoen er 3000kr.?

Øvingsoppgåve 4.6 (*)**.** Kari tek opp eit lån på 10.000 kr. til 3,65% rente p.a. Renta vert lagd til dagleg. Kor lang tid tek det før lånesaldoen er 20.000 kr.?

Eksempeloppgåve 4.7. Oveig har investert $\frac{1}{2}$ million kroner, men taper 5% i året. Kor lang tid tek det før formuen er halvert?

Løysing 4.3. Me løyser dette på same måte som oppgåve 4.1, bortsett frå at vekstfaktoren er mindre enn éin.

Tap på 5% gjev ein vekstfaktor på 0,95. Saldoen (i millionar) etter t år er dermed

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}95^t. \tag{23}$$

Me er interessert i tida t når formuen er halvert, dvs. til ein kvart million. Då har me

$$S(t) = \frac{1}{4}. \tag{24}$$

Dei to likningane (23) og (24) gjev to uttrykk for den same storleiken $S(t)$, og me kan setja dei saman i ei likning:

(25) $$\frac{1}{2}\cdot 0{,}95^t = \frac{1}{4},$$

eller

(26) $$0{,}95^t = \frac{1}{2},$$

Når me tek logaritmen, får me

(27) $$\log 0{,}95^t = \log\frac{1}{2},$$

eller

(28) $$t\cdot\log 0{,}95 = -\log 2.$$

Tida som går er altso

(29) $$t = \frac{-\log 2}{\log 0{,}95} = 13{,}51.$$

Det er ikkje klart frå oppgåva kor ofte ny saldo vert bokførd, so det er ikkje klart kor mykje me bør runda av. Me kan godt skriva at formuen er halvert etter om lag $13\frac{1}{2}$ år.

Øvingsoppgåve 4.8. Amalie har investert ein million kroner og taper 10% i året. Kor lang tid tek det før formuen er halvert?

Øvingsoppgåve 4.9. Prisen på PCar fell med 2% i året. Dersom dette held fram, kor lang tid går det før prisen er redusert med 20%?

Øvingsoppgåve 4.10 (†)**.** Bjørnestad *et al.*: oppgåve 4.13, 4.16, 4.18

4.2 Vidare lesing

Stoffet i dette kapittelet er dekt i Bjørnestad *et al.* kapittel 4.3–4.4, men då i ei meir omfattande og abstrakt framstilling. Me skal koma tilbake til eksponential- og logaritmefunksjonen seinare i kurset, og lærebokframstillinga kan venta til då.

Øvingsoppgåve 4.11 (†)**.** Bjørnestad *et al.*: oppgåve 4.20

Øvingsoppgåve 4.12 (†)**.** Bjørnestad *et al.*: oppgåve 4.16–18

Video: Oppsummering av Eksponential- og Logaritmefunksjonen

År	Inflasjon
1984	6,4%
1983	8,5%
1982	11,4%
1981	13,4%
1980	11,0%
1979	4,6%
1978	8,1%
1977	9,2%

Tabell 1: Inflasjon over ein kort historisk periode i Noreg. Kjelde *Smarte Penger*.

4.3 Gjennomsnittleg vekst

Eksempeloppgåve 4.13. Kor mykje auka prisane i Noreg totalt i fireårsperioden 1981–1984. Prisauka (inflasjonen) for kvart av åra står i tabell 1.

Løysing 4.4. Me tek prosentvis auke for kvart år frå tabellen, og finn vekstfaktorane:

$$1{,}134, 1{,}114, 1{,}085, 1{,}064.$$

Dersom me skriv I_0 for prisindeksen (prisnivået) ved inngangen til 1981, vert prisindeksen ved utgangen av 1984

$$I_1 = I \cdot 1{,}134 \cdot 1{,}114 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}064 \approx 1{,}458.$$

Prisene har altso auka med 45,8% over fire år.

Øvingsoppgåve 4.14. Kva er er den samla prosentvise prisauka i Noreg over fireårsperioden 1977–1980? Prisauka (inflasjonen) for kvart av åra står i tabell 1.

Eksempeloppgåve 4.15. Dersom me reknar ut (det aritmetriske) gjennomsnittet av prisaukene for åra 1981–1984, får me

$$\frac{13{,}4\% + 11{,}4\% + 8{,}5\% + 6{,}4\%}{4} = 9{,}925\%.$$

Kor mykje ville prisane ha auka over fireårsperioden dersom prisauka faktisk hadde vore 9,925% kvart einaste år?

Løysing 4.5. Dersom I_0 er prisindeksen før perioden, vert prisindeksen etter fire år

$$I_1 = I \cdot 1{,}099\,25^4 \approx I \cdot 1{,}460.$$

Prisene hadde altso auka med 46,0% over fire år.

Øvingsoppgåve 4.16. Dersom me reknar ut (det aritmetriske) gjennomsnittet av prisaukene for åra 1981–1984, får me

$$\frac{11{,}0\% + 4{,}6\% + 8{,}1\% + 9{,}2\%}{4} = 8{,}225\%.$$

Kor mykje ville prisane ha auka over fireårsperioden dersom prisauka faktisk hadde vore 8,225% kvart einaste år?

Merknad 4.1. Me er vane med at når me legg saman fire tal, so får me same resultat om me tek gjennomsnittet og gongar med fire. I oppgåvene over ser me at dette ikkje stemmer med prisauker i prosent. Grunnen er at prosentaukene ikkje vert addert. I staden gongar me saman vekstfaktorane. Det gjennomsnittet som me er vane med å rekna med vert ofte kalla aritmetisk gjennomsnitt, og det er nyttig for *additive* problem.

Når problemet er multiplikativt, treng me *geometrisk* gjennomsnitt. Det skal me sjå på nedanfor.

Eksempeloppgåve 4.17. Me såg over at prisane auka med 45,8% over fireårsperioden 1981–1984. Tenk deg at inflasjonen var den same alle fire åra. Kor stor må den årlege inflasjonen vera for å gje totalt 45,8% vekst over fire år?

Løysing 4.6 (med logaritmar)**.** Vekstfaktoren over fire år er 1,458. Når inflasjonen er den same kvart år, vert òg vekstfaktoren v den same. Prisindeksen på slutten av perioden er altso $I_0 \cdot 1{,}458$ eller $I_0 \cdot v^4$. Me får altso likninga

$$1{,}458 = v^4,$$

som me kan løysa ved hjelp av logaritmar:

$$\ln 1{,}458 = \ln v^4 = 4 \cdot \ln v.$$

Me delar på 4 og får (vha. kalkulator)

$$\ln v = \frac{\ln 1{,}458}{4} \approx 0{,}094\,266.$$

For å finna v, må me no bruka eksponentialfunksjonen (e^x eller exp på kalkulatoren):

$$v \approx \exp 0{,}094\,266 \approx 1{,}0989.$$

Inflasjonen er altso 9,89% i gjennomsnitt.

Løysing 4.7 (med eksponentialfunksjon)**.** Vekstfaktoren over fire år er 1,458. Når inflasjonen er den same kvart år, vert òg vekstfaktoren v den same. Prisindeksen på slutten av perioden er altso $I_0 \cdot 1{,}458$ eller $I_0 \cdot v^4$. Me får altso likninga

$$1{,}458 = v^4.$$

År	Inflasjon
1924	10,7%
1923	−6,7%
1922	−16,7%
1921	−6,5%
1920	14,9%
1919	6,3%
1918	40,0%

Tabell 2: Inflasjon og deflasjon over ein kort historisk periode i Noreg. Kjelde *Smarte Penger*.

Her kan me opphøya i $\frac{1}{4}$ på båe sidene:

$$1{,}458^{\frac{1}{4}} = (v^4)^{\frac{1}{4}} = v^{4\frac{1}{4}} = v.$$

Når me reknar ut venstresida, har me

$$v \approx 1{,}0989.$$

Inflasjonen er altso 9,89% i gjennomsnitt.

Merknad 4.2. Det me har rekna ut i oppgåva over er det geometriske gjennomsnittet av dei årlege inflasjonsratane.

Merknad 4.3. Logaritmefunksjonen ln som me har brukt før, og eksponentialfunksjonen exp er inverse funksjonar. Dvs. at dersom $\ln y = x$, so er $\exp x = y$.

Denne eksponentialfunksjonen er eit særtilfelle av eksponentialfunksjonane som me studerte i kapittel 3. Me kan skriva $\exp x = e^x$ der talet e er (omtrent) 2,718 281 828 459 045. Akkurat dette talet, og eksponentialfunksjonen exp har mange pene matematiske eigenskaper, men det må me koma tilbake til seinare. Det einaste du treng vita no, er at ln og exp er omvendte funksjonar og kvar du finn dei på kalkulatoren.

Øvingsoppgåve 4.18. Rekn ut gjennomsnittleg årleg inflasjon for perioden 1977–1980. Bruk geometrisk gjennomsnitt.

Eksempeloppgåve 4.19. Me er vane med at prisane berre går opp. Historisk har det likevel hendt at prisane går ned. Det kaller me *deflasjon*, som rett og slett er inflasjon med negativt forteikn. Tabell 2 viser inflasjonen 1918–1924. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1923 og i 1924.

Løysing 4.8. I 1924 har me vekst på $r = 10{,}7\%$ eller mao. $r = 0{,}107$. Vekstfaktoren er $1 + r = 1{,}107$.

Tilsvarande i 1923, har me $r = -6{,}7\% = 0{,}067$ og vekstfaktoren er

$$1 + r = 1 + (-0{,}067) = 1 - 0{,}067 = 0{,}933.$$

Øvingsoppgåve 4.20. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1922. Bruk tabell 2.

Øvingsoppgåve 4.21. Kva er vekstfaktoren for prisindeksen i 1918. Bruk tabell 2.

Eksempeloppgåve 4.22. Finn gjennomsnittleg inflasjon i perioden 1922–1924. Bruk grunnlagstala frå tabell 2.

Løysing 4.9. Tala frå tabellen gjev vekstfaktorane 1,107%, 0,933% og 0,833%. Samla vekst er då

$$1{,}107 \cdot 0{,}933 \cdot 0{,}833 = 0{,}8603.$$

Me skal finna gjennomsnittleg vekstfaktor v slik at tre år med vekst v gjev samla vekst med vekstfaktor 0,8603. Med andre ord skal me løysa likninga

$$0{,}8603 = v^3,$$

eller

$$\ln 0{,}8603 = 3 \ln v.$$

Dette gjev

$$\ln v = \frac{\ln 0{,}8603}{3} \approx -0{,}050\,158.$$

Vekstfaktoren då er

$$v = \exp(-0{,}050\,158) \approx 0{,}951.$$

For å skriva dette som prosentvis vekst, finn med $r = v - 1 = -0{,}0489$. Me har altso ein gjennomsnittleg inflasjon på $-4{,}9\%$ per år, eller ein gjennomsnittleg deflasjon på $+4{,}9\%$ per år.

Øvingsoppgåve 4.23. Finn gjennomsnittleg inflasjon i sjuårsperioden 1918–1924. Bruk grunnlagstala frå tabell 2.

5 Veke 5–6. Finansmatematikk

5.1 Fast sparebeløp

Eksempeloppgåve 5.1 (Fast sparebeløp)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. kvart år i seks år. Kor stor er saldoen når han har sett inn det sjette beløpet?

Løysing 5.1 (Fyrste forsøk)**.** Me kan setja utrekninga opp i ein tabell.

År	Gamal saldo	Rente	Innskot	Ny saldo
1	0 kr.	0 kr.	1000 kr.	1000 kr.
2	1000 kr.	30 kr.	1000 kr.	2030 kr.
3	2030 kr.	60,90 kr.	1000 kr.	3090,90 kr.
4	3090,90 kr.	92,73 kr.	1000 kr.	4183,63 kr.
5	4183,63 kr.	125,51 kr.	1000 kr.	5309,14 kr.
6	5309,14 kr.	159,27 kr.	1000 kr.	6468,41 kr.

Kvart år har me rekna ut ny saldo som summen av gamal saldo, rentene på gamal saldo, og det nye innskotet (alltid 1000 kr.).

Løysing 5.2 (Alternativ løysing)**.** I det fyrste forsøket rekna me ut saldoen år for år, ei tabelline per år. Alternativt kan me ta for oss kvart av dei seks sparebeløpa for seg, og rekna ut kor mykje kvart beløp er verd på slutten med renter. Det fyrste beløpet står i fem år, og får renter fem gongar. Dei andre beløpa får mindre renter, det siste ingen renter i det heile. Då ser tabellen slik ut:

Beløp nr.	Tid på konto	Verdi ved slutten av perioden
1	5 år	$1000 \cdot 1{,}03^5 = 1159{,}27$
2	4 år	$1000 \cdot 1{,}03^4 = 1125{,}51$
3	3 år	$1000 \cdot 1{,}03^3 = 1092{,}73$
4	2 år	$1000 \cdot 1{,}03^2 = 1060{,}90$
5	1 år	$1000 \cdot 1{,}03^1 = 1030$
6	0 år	$1000 \cdot 1{,}03^0 = 1000$
Total	—	6468,41

Øvingsoppgåve 5.2. Kari har 4% rente på sparekontoen sin og sparer 100kr. kvart år i fem år. Kor mykje står på kontoen hennar når ho har sett inn det femte beløpet? Løys helst oppgåva på to måtar og sjekk at du får same svar.

5.2 Summeteiknet

Merknad 5.1. Me vil få nytte av meir kompakt, matematisk notasjon for tabellen i den alternative løysinga over. Skriv S_6 for saldoen etter seks år. Tabellen viser at S_6 er summen av seks ledd på formen $1000 \cdot 1{,}03^i$ for ulike verdiar av i. Matematisk skriv me

$$S_6 = 1000 + 1000 \cdot 1{,}03^1 + 1000 \cdot 1{,}03^2 + 1000 \cdot 1{,}03^3 + 1000 \cdot 1{,}03^4 + 1000 \cdot 1{,}03^5$$

eller

$$S_6 = \sum_{i=0}^{5} (1000 \cdot 1{,}03^i).$$

Me kan setja utanfor parentes, slik:

$$S_6 = 1000 \cdot (1 + 1{,}03^1 + 1{,}03^2 + 1{,}03^3 + 1{,}03^4 + 1{,}03^5)$$

eller slik

$$S_6 = 1000 \cdot \left(\sum_{i=0}^{5} 1{,}03^i \right).$$

Ein slik sum, der alle ledda har formen $a \cdot b^i$ for ulike verdiar av i, kaller me for ei *geometrisk rekkje*.

Merknad 5.2. Teiknet $\sum$ er den greske bokstaven stor sigma, men me kaller det gjerne for summeteikn når det er brukt som i merknaden over.

Eksempeloppgåve 5.3. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x^2 + x^4 + x^6 + x^8$$

Løysing 5.3. Her er det eksponenten som varierer frå ledd til ledd. Alle er partal, som kan skrivast som $2i$, der i går frå 1 til 4. Då kan me skriva summen som

$$\sum_{i=1}^{4} x^{2i}.$$

Øvingsoppgåve 5.4. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$$

Øvingsoppgåve 5.5. Skriv fylgjande sum ut med eksplisitte ledd og plussteikn:

$$\sum_{i=1}^{5} i.$$

Eksempeloppgåve 5.6. Ofte har me summar med svært mange ledd, t.d.

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100}.$$

Skriv summen med summeteikn.

Rekneregel 5.1 Geometrisk rekkje

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Løysing 5.4. Ellipsen $(\cdots)$ indikerer manglande ledd. Der er ingen formelle regler som seier kva ledd som manglar. Me må sjå på mynsteret i dei ledda som finst, og litt sunt bondevett, og dei fleste vil då tenkja at der skal vera 100 ledd på formen $i \cdot a_i$. Med summeteikn skriv me:

$$\sum_{i=1}^{100} i \cdot a_i.$$

Øvingsoppgåve 5.7. Skriv fylgjande sum med summeteikn:

$$x^2 + x^3 + x^4 + \cdots x^{50}.$$

Merknad 5.3. Me skreiv parentesene i Merknad 5.1 av pedagogiske grunnar, for å unngå tvetyding og gjera operasjonane lettare gjenkjennelege. Dei er ikkje naudsynte, og det er korrekt å skriva

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{i=0}^{5} 1000 \cdot 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{5} 1{,}03^i. \end{aligned} \tag{30}$$

5.3 Annuitetar

Eksempeloppgåve 5.8 (Fast sparing over lang tid)**.** Ola har ein sparekonto med 3% rente. Han set inn 1000 kr. kvart år i tredve år. Kor stor er saldoen når han har sett inn det tredvte beløpet?

Løysing 5.5. Oppgåva er identisk med oppgåve 5.1 bortsett frå at perioden er lenger. Me har tredve sparebeløp som får renter fleire eller færre gongar. Det fyrste får rente 29 gongar, og det siste ingen gongar. Dette gjev ein sum med tredve ledd:

$$\begin{aligned} S_{30} &= \sum_{i=0}^{29} 1000 \cdot 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}03^i. \end{aligned} \tag{31}$$

Merk at i går frå 0 t.o.m. 29, det gjev 30 ledd.

Me kan setja dette opp i ein tabell som då me hadde seks periodar, men det er mykje arbeid. I staden skal me bruka rekneregel 5.1, der $x = 1{,}03$ er vekstfaktoren og $n = 30$ er talet på periodar. Me skriv

$$\begin{aligned} S_{30} &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}03^i \\ &= 1000 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{1{,}03 - 1} \\ &= 1000 \cdot \frac{1{,}03^{30} - 1}{0{,}03} \end{aligned} \tag{32}$$

Siste steg kan me rekna ut på kalkulator:

$$S_{30} \approx 1000 \cdot 47{,}575\,415\,7 \approx 47\,575{,}42.$$

Øvingsoppgåve 5.9. Gjenta oppgåve 5.2 men bruk formelen for ei geometrisk rekkje som over. Får du same svar som før?

Øvingsoppgåve 5.10. Kari har 4% rente på sparekontoen sin og sparer 100 kr kvart år i 35 år. Kor mykje står på kontoen hennar når ho har sett inn det 35. beløpet?

Eksempeloppgåve 5.11. Pelle har spart 2000 kr i året sidan år 2000. Han satte inn det fyrste beløpet 1. januar 2000 og det siste beløpet 1. januar 2017. Rentesatsen er 2,5%. Kor mykje pengar har han på konto når han har fått rentene ved utgangen av 2017?

Løysing 5.6 (Beint fram med lange summar)**.** Her har Pelle spart i 18 år, og me tek med rentene for det attande året i summen. Dermed har det fyrste sparebeløpet fått renter for 18 år, og det attande og siste beløpet har fått renter for eitt år.

Saldoen som me skal fram til er dermed

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025^{18} + 2000 \cdot 1{,}025^{17} + \ldots + 2000 \cdot 1{,}025^{2} + 2000 \cdot 1{,}025^{1}.$$

Det er greitt å setja felles faktorar utanfor parentes, slik at 1 vert det siste leddet i summen; slik

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \left(1{,}025^{17} + 1{,}025^{16} + \ldots + 1{,}025^{2} + 1{,}025^{1} + 1{,}025^{0}\right).$$

Skriv me dette med summeteikn får me

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{i=0}^{17} 1{,}025^i.$$

No kan me lett bruka formelen, og skriva

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{18} - 1}{1{,}025 - 1}.$$

Når me reknar ut, gjerne med kalkulator, får me

$$S_{18} = 2050 \cdot 22{,}386 = 45\,892{,}01.$$

Saldoen ved utgangen av 2017 er altså 45 892,01 kr.

Løysing 5.7 (Med summeteikn)**.** Her har Pelle spart i 18 år, og me tek med rentene for det attande året i summen. Dermed har det fyrste sparebeløpet fått renter for 18 år, og det attande og siste beløpet har fått renter for eitt år.

Saldoen som me skal fram til er dermed

$$S_{18} = 2000 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025^j.$$

Merk at summen startar med $j = 1$, og ikkje $i = 0$ som i formelen. Me må difor skriva om summen slik at han startar med $i = 0$.

Me kan skilja ut éin faktor frå potensen, slik

$$S_{18} = 2000 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025 \cdot 1{,}025^{j-1} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{j=1}^{18} 1{,}025^{j-1}.$$

Eksponenten $j - 1$ startar no på 0 (for $j = 1$). Lat oss setja $i = j - 1$; då får me

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \sum_{i=0}^{17} 1{,}025^i,$$

og me kan bruka formelen, som gjev

$$S_{18} = 2000 \cdot 1{,}025 \cdot \frac{1{,}025^{18} - 1}{1{,}025 - 1}.$$

Når me reknar ut, gjerne med kalkulator, får me

$$S_{18} = 2050 \cdot 22{,}386 = 45\,892{,}01.$$

Saldoen ved utgangen av 2017 er altså 45 892,01 kr.

Merknad 5.4. Merk at resonnementet er det same i båe løysingsforslaga. Det er berre notasjonen som skil dei.

Løysing 5.8 (Med summeteikn)**.** Der er ein tredje variant av løysingsmetoden.

Me kan fyrst rekna ut saldoen like etter at det 18de beløpet er sett inn, på same måte som me gjorde i oppgåve 5.8. Då har me

$$S'_{18} = 2000 \cdot \sum_{j=0}^{17} 1{,}025^j = 2000 \cdot \frac{1{,}025^{18} - 1}{1{,}025 - 1} = 44\,772{,}70.$$

Eitt år seinar har Pelle fått renter (2,5%) men ikkje sett inn fleire innskot. Dermed veks saldoen med ein vekstfaktor på 1,025. Altso

$$S_{18} = 1{,}025 \cdot S'_{18} = 1{,}025 \cdot 44\,772{,}70 = 45\,892{,}01.$$

Saldoen ved utgangen av 2017 er altså 45 892,01 kr.

Øvingsoppgåve 5.12. Ingeborg skal spara til pensjon. Ho sparer 10 000 kr per år, med det fyrste beløpet 1. januar 1995 og det siste beløpet 1. januar 2018. Rentesatsen er 4%. Kor mykje pengar har ho på kontoen ved utgangen av 2018, inklusive renter for 2018?

5.4 Sparemål

Eksempeloppgåve 5.13. Håkon sparer 1000 kr i året og får 5% rente. Kor mange år går det før han har spart opp 20 000 kr med renter?

Løysing 5.9. Her kjenner me saldoen på slutten, i tillegg til rentesatsen og sparebeløpet. Det me ikkje kjenner er kor lenge Håkon må spare. Lat oss skriva n for talet på sparebeløp. Legg merke til at det går $n-1$ år frå fyrste til siste sparebeløp.

Saldoen etter n sparebeløp er en sum med n ledd, slik

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} 1000 \cdot 1{,}05^i \\ &= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i. \end{aligned}$$

Sidan me kjenner sparemålet, $S_n = 20000$, kan me skriva dette som

$$20\,000 = 1000 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i.$$

Me kan dela på 1000 med ein gong

$$20 = \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}05^i.$$

Høgre side kan forenklast med regelen for geometriske rekkjer

$$20 = \frac{1{,}05^n - 1}{1{,}05 - 1} = \frac{1{,}05^n - 1}{0{,}05}.$$

Dersom me gongar med 0,05 på båe sider, får me

$$1 = 1{,}05^n - 1,$$

og til slutt kan me leggja til 1, og få

$$2 = 1{,}05^n.$$

Når potensen står aleine, kan me bruka logaritmefunksjonen igjen, på same måte som i kapittel 4,

$$\ln 2 = \ln 1{,}05^n = n \cdot \ln 1{,}05.$$

Til slutt kan me dela gjennom for å løysa for n:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2.$$

Håkon passerer altso 20 000 når han set inn det 15. sparebeløpet, 14 år etter at han starta å spara.

Øvingsoppgåve 5.14. Margrete sparer 500 kr i året og får 10% rente. Kor mange år går det før ho har spart opp 15 000 kr med renter?

Eksempeloppgåve 5.15. Nils er 37 år og planlegg pensjonen sin. Han meiner at han treng ein ekstra pensjonsformue på 3 000 000 kr når han er 67 år. Rentenivået er 4%. Kor mykje må han spara per år for å nå sparemålet sitt?

Løysing 5.10. Oppgåva gjev eit lite tolkingsrom i når han set inn det fyrste beløpet og når han tek ut det siste. For å unngå utfordringa med renter på innskot gjort midt på året, so går me ut frå at han alltid set inn sparebeløpet 31. desember. Dersom han startar når han er 37, so vil han vera 66 år når han set inn det 30. beløpet. Dei pengane er klar den dagen han fyller 67 år, utan at han har fått renter på det siste innskotet.

Denne gongen veit me kor mange periodar han sparer og kva han skal ha på slutten. Det er sparebeløpet me må finna, lat oss kalla det x. Me kan setja opp likninga som me har gjort før

$$S_n = x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1{,}04^i,$$

eller

$$\begin{aligned} 3\,000\,000 &= x \cdot \sum_{i=0}^{29} 1{,}04^i \\ &= x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{1{,}04 - 1}. \\ &= x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04}. \end{aligned}$$

Lat oss snu likninga, og få x på venstre side:

$$x \cdot \frac{1{,}04^{30} - 1}{0{,}04} = 3\,000\,000$$

So flyttar me over, fyrst nemnaren i brøken:

$$x \cdot (1{,}04^{30} - 1) = 3\,000\,000 \cdot 0{,}04 = 120\,000.$$

Og so kan me dela på båe sidene:

$$x = \frac{120\,000}{1{,}04^{30} - 1} \approx 53\,490{,}30$$

Han må altso spara 53 490,30 kr i året.

Øvingsoppgåve 5.16. Per og Kari drøymer om ei jordomseiling, og dei tenkjer å spara over fem år, for livets store tur. Dei legg eit budsjett på 200 000 kroner. Rentenivået er 3%. Kor mykje må dei spara per år for å ha råd til turen?

5.5 Noverdi

Eksempeloppgåve 5.17. Fredrik går av med pensjon, og må velja korleis han vil ha pensjonen utbetalt. Han ynskjer å bruka ein del av saldoen for å få ein årleg utbetaling på 100 000 kr per år i ti år. Ein slik utbetalingsplan vert gjerne kalla ein *annuitet*, og prisen er gjeve som samanlagd noverdi for alle utbetalingane. Rentenivået er 5%. Han får den fyrste utbetalinga umiddelbart og ti utbetalingar totalt. Kor mykje må han betala for annuiteten?

Løysing 5.11. Noverdien er ein sum av ti utbetalingar, der den siste er diskontert (sjå definisjon 3.3) ni gongar og den fyrste null gongar, dvs.

$$V = \sum_{i=0}^{9} 100\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = 100\,000 \cdot \sum_{i=0}^{9} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i.$$

Rekneregelen gjev

$$V = 100\,000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} = 100\,000 \cdot \frac{-0{,}3860}{-0{,}047\,619} = 810\,782{,}17.$$

Han må betala 810 782,17 kr for annuiteten.

Merknad 5.5. Ein slik årleg utbetaling vert ofte kalla ein *annuitet* (av latin *anno* for år). Ordet vert brukt i mange samanhengar i finans, der faste, periodiske beløp vert betalt.

Øvingsoppgåve 5.18. Felicia går av med pensjon og skal kjøpa ein annuitet som gjev 100 000 kr per år i tolv år. Rentenivået er 4%. Kor mykje må ho betala for annuiteten når den fyrste utbetalinga kjem umiddelbart?

Øvingsoppgåve 5.19. Sjå annuiteten til Felicia igjen (oppg. 5.18). Ho vil heller at utbetalinga startar om eitt år, og ikkje umiddelbart. Ho skal stadige ha tolv årlege utbetalingar på 100 000 kr kvar, med rentenivå på 4%.

1. Tenk over før du reknar: Må ho betala meir eller mindre for annuiteten?
2. Rekn ut kor mykje ho må betala.
3. Reflektér: Stemmer rekninga med det du tenkte på førehand?

Øvingsoppgåve 5.20. Annanias vil bruka heile pensjonsformuen sin på årlege utbetalingar på 100 000 kroner. Han startar med ein pensjonsformue på 1 000 000 kroner og ein rentesats på 4,8%. I kor mange år kan han få ein utbetaling på 100 000 kroner før formuen er brukt opp?

Løysing 5.12 (Utfylling)**.** Oppgåva seier ikkje om utbetalinga startar umiddelbart eller om eit år, so her står me fritt til å tolka. Løysinga er enklast om utbetalinga startar umiddelbart, so me går ut frå det.

Han skal ha ein annuitet over t år, for so stor t som råd.

1. Sett opp eit uttrykk for noverdien av annuiteten over t år.
2. Kor mange år kan ho betala for når han har 1 000 000 kroner å kjøpa for (i noverdi)?
3. Drøft: skal me runda svaret over opp eller ned?

Videoen løyser ei oppgåve som liknar oppgåva under. **Video**: Løysing

Øvingsoppgåve 5.21. Elias vil òg bruka heile pensjonsformuen sin på årlege utbetalingar. Han har ein formue på 2 500 000 kroner og ein rentesats på 4,5%. Han vil ha ei årleg utbetaling på 120 000 kroner. I kor mange år har han råd til å få denne annuiteten?

Øvingsoppgåve 5.22 (†)**.** Elias vurderer månadlege utbelingar på 10 000 kroner i staden for årleg utbetaling. Formuen og rentesatsen er elles som i oppgåva over. I kor mange år og månader har han råd til å få denne annuiteten?

Merknad 5.6. I oppgåva over støyter ein på fenomenet effektiv rente igjen, berre med diskontering i staden for forrenting. Fordi den effektive renta vert høgare med kortare renteperiodar, er det ikkje sikkert at pensjonsselskapet vil tilby same (nominelle) rentesats med månadlege annuitetar. Det kan vera interessant å drøfta dette i detalj.

Det er likevel nyttig å løysa oppgåva ved å rekna med same nominelle rentesats (4,5%), som vert periodisert i månader slik som me rekna med månadleg forrenting.

5.6 Annuitetslån

Eksempeloppgåve 5.23. Jenny kjøper moped og låner 50 000 kroner i banken til 8% rente per år. Ho får eit annuitetslån, slik at ho betaler eit fast årleg beløp (annuitet) på 10 000 kr som dekkjer renter og avdrag. Kor mykje av lånet gjenstår etter fem år?

Løysing 5.13 (Med tabell)**.** Den mest oversiktlege måten å rekna ut dette på, er å setja opp ein tabell med lånesaldoen år for år.

År	Saldo inn	Med renter	Etter innbetaling
1	50 000	$\times 1{,}08 \to 54\,000$	$-10\,000 \to 44\,000$
2	44 000	$\times 1{,}08 \to 47\,520$	$-10\,000 \to 37\,520$
3	37 520	$\times 1{,}08 \to 40\,521{,}60$	$-10\,000 \to 30\,521{,}60$
4	30 521,60	$\times 1{,}08 \to 32\,963{,}33$	$-10\,000 \to 22\,963{,}33$
5	22 963,33	$\times 1{,}08 \to 24\,800{,}40$	$-10\,000 \to 14\,800{,}40$

Restlånet etter fem år er altså 14 800,40 kroner.

Tabellen er fin og overiktleg, men når låneperioden vert lenger, vert det tungvint. Lat oss freista ein meir abstrakt metode òg, som vert meir praktisk med lange låneperiodar, og so samanlikna svara.

Løysing 5.14 (Kontantstraumen). Lånet kan me modellera som to uavhengige kontantstraumar: ei låneutbetaling frå banken og ein serie med nedbetalingar. Oppgåva spør om lånesaldoen etter fem år. Me må difor samanlikna verdien av dei to straumane etter fem år.

Verdien av utbetalinga er lånebeløpet med renter for fem år:

$$U = 50\,000 \cdot 1{,}08^5 = 73\,466{,}40$$

Verdien av innskota kan me rekna ut med same rentesats, men med færre renteperioda. Fyrste nedbetaling skjer om eitt år og får renter for fire år; siste nedbetaling om fem år får ikkje renter.

$$I = \sum_{i=0}^{4} 10\,000 \cdot 1{,}08^i$$

Med formellen for geometrisk rekkje har me:

$$I = 10\,000 \cdot \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08 - 1} = 58\,666{,}01.$$

Lånesaldoen etter fem år er differansen

$$S = U - I = 14\,800{,}39.$$

Restlånet etter fem år er altså 14 800,39 kroner.

Merknad 5.7. Der er eit avvik på eitt øre mellom dei to svara. Årsaka til dette må vera avrundingsfeil. I tabellen runda me av til to desimalar for kvar line. Sjølv om kvar avrundingsfeil er mindre enn eit halvt øre, kan dei summera opp til eit heilt øre eller meir over fem liner. I den andre løysinga har me berre runda av to gongar, ein for I og ein for U, og avrundingsfeilen i sluttsvaret vert (venteleg) mindre.

Merknad 5.8. Sjølv om det andre løysingsforslaget er meir presist frå eit matematisk synspunkt, med mindre avrundingsfeil, so er det ikkje sikkert at det er det mest riktige svaret i røynda. Ofte kan lånevilkåra spesifisera at avrunding til heile øre skal skje kvart år, slik som rekna i tabellen. Slik som oppgåva er formulert, må me rekna båe løysingane for korrekte.

Øvingsoppgåve 5.24. Lars Magnus går av med pensjon, med ein pensjonsformue på 1,2 millionar kroner. Dei fyrste fem åra vil han reisa, og bruka relativt mykje pengar. Han vil difor ha ei årleg utbetaling (annuitet) på 200 000 kr desse fem åra. Avkastinga på pensjonskontoen er 4%. Kor mykje har han att på pensjonskontoen etter fem år (like etter at han har fått den femte annuiteten)? Løys helst oppgåva på to måtar, og samanlikn svara.

Øvingsoppgåve 5.25. Kalle har eit annuitetslån til 3,5% rente. Lånet var på 2 millionar kroner for tjue år sidan, og han har betalt 100 000 kr i året i renter og avdrag. Kor stort er lånet i dag?

Eksempeloppgåve 5.26. Sofie skal kjøpa bil og må låna pengar i banken. Ho vil ha eit annuitetslån, slik at ho betaler eit fast årleg beløp (annuitet) som dekkjer renter og avdrag. Renta er 5%, og lånet må vera betalt innan fem år. Ho har råd til å betala 20 000 kr per år. Kor mykje kan ho låna?

Løysing 5.15. Dette er eit noverdiproblem. Låneproblemet har to betalingsstraumar: det som banken betaler (låner) til Sofie, og det som Sofie betaler til banken. Desse to straumane må ha same verdi. Noverdi er standardmålet når me skal samanlikna pengebeløp på ulike tidspunkt.

Lånebeløpet på x kr vert utbetalt no, so noverdien er òg x.

Innbetalingane er ein straum med fem årlege annuitetar, den fyrste om eitt år. Her reknar med noverdi slik som me har gjort før. Noverdien er

$$V = \sum_{i=1}^{5} 20\,000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = 20\,000 \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i.$$

For å bruka formelen, må me trekkja ut éin faktor slik at summen startar med $i = 0$.

$$V = \frac{20\,000}{1{,}05} \cdot \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^i = \frac{20\,000}{1{,}05} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1}.$$

Resten kan me ta på kalkulator, og me finn at Sofie kan låna $V = 86\,589{,}53$ kroner.

Øvingsoppgåve 5.27. Stein og Stine skal kjøpa leilegheit. Dei kan få eit annuitetslån til 3% rente over 20 år. Dei har råd til å betala 120 000 kr per år i renter og avdrag. Kor mykje kan dei låna?

Eksempeloppgåve 5.28. Ronny vil kjøpa motorsykkel og vil låna 100 000 kroner i banken. Renta er 8% og han må betala ned lånet over fem år. Han ynskjer eit annuitetslån, slik at han betaler eit fast årleg beløp (annuitet) som dekkjer renter og avdrag. Kor mykje må han betala per år?

Løysing 5.16. Her kan me bruka same modell som i oppgåve 5.26. Skilnaden er at lånebeløpet på 100 000 er kjend, medan den årlege tilbakebetalinga er ukjend, lat oss kalla beløpet x.

Noverdien av lånet er 100 000 kroner.

Noverdien av tilbakebetalinga er

$$V = x \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^i = x \cdot 1{,}08 \cdot \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{1}{1{,}08}\right)^i = \frac{x}{1{,}08} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}08}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}08} - 1}.$$

Ved hjelp av kalkulator kan me forenkla likninga

$$V = \frac{x}{1{,}08} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}08}\right)^5 - 1}{\frac{1}{1{,}08} - 1} = \frac{x}{1{,}08} \cdot 4{,}312\,13 = x \cdot 3{,}992\,71.$$

Sidan lånet er 100 000 kroner, må me ha $V = 100\,000$ for å gjera opp. Det gjev likninga

$$100\,000 = x \cdot 3{,}992\,71.$$

Me løyser ved å dela på båe sidene:

$$x = \frac{100\,000}{3{,}992\,71} = 25\,045{,}65.$$

Han må altso betala 25 045,65 kroner i året.

Øvingsoppgåve 5.29. Ronny (i forrige oppgåve) går til ein annan bank for å sjå om der finst betre tilbod på annuitetslån på 100 000 kroner. Han får eit tilbod med nedbetaling over seks år og rente på 8,5%. Kor mykje må han betala per år?

5.7 Månadleg nedbetaling

I alle oppgåvene i forrige avsnitt såg på lån med årleg nedbetaling. Lat oss no sjå på meir realistiske lån med månadleg nedbetaling.

Eksempeloppgåve 5.30. Iris kjøper båt og låner 60 000 kroner i banken til 6% nominell rente per år. Ho får eit annuitetslån der ho skal betala 1000 kroner i månaden i renter og avdrag. Forrentinga skjer òg månadleg, samstundes med forfall på avdraga. Kor mykje av lånet gjenstår etter fem år?

Løysing 5.17. Her taler oppgåva både om år og månader. Me må rekna om slik at me har alle tala rekna i månader, slik at det stemmer med nedbetalingstidspunkta.

Renta er 6% per år, nominelt. Månadsrenta vert då

$$r = \frac{6\%}{12} = 0{,}5\%.$$

Dette gjev ein vekstfaktor på 1,005. Nedbetalingstida er fem år, eller $5 \cdot 12 = 60$ månader.

Over fem år veks lånet til

$$U = 60\,000 \cdot 1{,}005^{60} = 80\,931{,}01.$$

Verdien av nedbetalingane er

$$I = \sum_{i=0}^{59} 1000 \cdot 1{,}005^{i}$$

Med formellen for geometrisk rekkje har me:

$$I = 1000 \cdot \frac{1{,}005^{60} - 1}{1{,}005 - 1} = 69\,770{,}03.$$

Restlånet er differansen $U - I = 11\,160{,}98$ kroner.

Merknad 5.9. Merk at den effektive renta vert høgare enn den nominelle, årlege renta med månadleg forrenting. Oppgåva presiserer at renta er oppgjeve nominelt, og då er det enkelt å rekna ut månadsrenten, men vanskeleg å samanlikna kostnadene med andre lån med årleg nedbetaling.

Øvingsoppgåve 5.31. Lars Magnus går av med pensjon, med ein pensjonsformue på ein million kroner. Dei fyrste fem åra vil han reisa, og bruka relativt mykje pengar. Han vil difor ha ei månadleg utbetaling (annuitet) på 15 000 kroner desse fem åra. Avkastinga på pensjonskontoen er 4%. Kor mykje har han att på pensjonskontoen etter fem år.

Merknad 5.10. Merk korleis oppgåvene over liknar på oppgåve 5.23 og 5.24. Oppgåvene nedanfor er likeeins analoge til dei andre oppgåven i forrige avsnitt.

Øvingsoppgåve 5.32. Kalle har eit annuitetslån til 3,5% rente. Lånet var på 2 millionar kroner for femten år sidan, og han har betalt 10 000 kr i månaden i renter og avdrag. Kor stort er lånet i dag?

Øvingsoppgåve 5.33. Stein og Stine skal kjøpa leilegheit. Dei kan få eit annuitetslån til 3% rente over 20 år, med månadleg forrenting og nedbetaling. Dei har råd til å betala 10 000 kr per månad i renter og avdrag. Kor mykje kan dei låna?

Øvingsoppgåve 5.34. Ronny vil kjøpa motorsykkel og vil låna 100 000 kroner i banken. Renta er 6% og han må betala ned lånet over fem år med månadleg forrenting og nedbetaling. Kor mykje må han betala per månad?

5.8 Uendeleg kontantstraum

Eksempeloppgåve 5.35. Investoren Kristin West vurderer å kjøpa opp gründerbedrifta Knallstraum AS. Knallstraum AS er bygd på ein unik idé, og Kristin reknar med at dei vil tena 20 millionar kroner i året i all framtid. Kva er noverdien til bedrifta når me reknar med 4% diskonteringsrente?

Løysing 5.18. Noverdien til ei bedrift, er verdien av den kontantstraumen (inntektsstraumen) som ho er venta å gje. Det er naturleg å tenkja at den fyrste inntekten kjem om eitt år, slik at noverdien vert

$$I_1 = \frac{20}{1{,}04},$$

rekna i mNOK.

Heile kontantstraumen vert ein sum med uendeleg mange ledd:

$$I = \frac{20}{1{,}04} + \frac{20}{1{,}04^2} + \frac{20}{1{,}04^3} + \frac{20}{1{,}04^4} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{20}{1{,}04^j} = 20 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^j,$$

der ∞ tyder uendeleg. Dette er eit godt utgangspunkt for å bruka formelen for ei geometrisk rekkje, men éin ting er feil. Summen startar på $j = 1$, medan formelen krev at han startar med $j = 0$. Dette kan me ordna, ved å ta éin faktor til utanfor summen:

$$I = 20 \cdot \frac{1}{1{,}04} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{j-1}.$$

No ser me at når me tel frå 1, startar eksponenten $j - 1$ på 0. Set me inn $i = j - 1$, får me

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{i}.$$

No har me den vande formen, og formelen gjev

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{\infty} - 1}{\frac{1}{1{,}04} - 1}. \tag{33}$$

Sjå no på potensen som dukkar opp:

$$\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{\infty}$$

Sidan nemnaren er større en teljaren er brøken mindre enn 1, og når me gongar brøken med seg sjølv vert talet enno mindre. Eksponenten ∞ tyder at me gongar brøken med seg sjølv uendeleg mange gongar, og dermed kjem potensen uendeleg nær null.

$$\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^{\infty} \approx 0$$

Då får me

$$I = \frac{20}{1{,}04} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{1{,}04} - 1} = \frac{-20}{1 - 1{,}04} = \frac{-20}{-0{,}04} = \frac{20}{0{,}04}$$

Det siste steget tek me på kalkulator og finn $I = 500$. Mao. bedrifta er verd 500 mNOK.

Øvingsoppgåve 5.36. Karl er ein litt meir pessimistisk investor. Han vurderer òg å by på Knallstraum AS, som i forrige oppgåve. Han er samd i inntektsvurderinga på 20 millionar kroner i året, men han reknar med 3% diskonteringsrente. Kor mykje kan Karl maksimalt tenkja seg å by på bedrifta?

Øvingsoppgåve 5.37. Optimisten Ola trur at Knallstraum AS kjem til å tena 25 millionar kroner i året i all framtid. Han reknar med 3,5% diskonteringsrente. Kor mykje meiner Ola at bedrifta er verd?

Merknad 5.11. Me har brukt litt uortodoks notasjon over, og skriv x^{∞} der strenge matematikarar ville ha skrive

$$\lim_{a \to \infty} x^a.$$

Denne notasjonen med lim for latin *limes* (engelsk *limit*) eller grenseverdi på norsk, er nyttig nok, men her er han unødvendig tungvint. Den uortodokse notasjonen x^{∞} er mykje lettare å forstå, og sidan han òg er utvetydig er det uproblematisk å ta han i bruk.

5.9 Serielån†

Eksempeloppgåve 5.38 (Serielån)**.** Ola har lånt 50 000 kroner til 5% rente. Kvart år betaler han ned 10 000, i tillegg til rentene som påløp det året.

1. Kor mykje må han betala kvart år?
2. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Løysing 5.19. Lat oss setja opp alle utrekningane i ein tabell for å få god oversikt. Alle beløpa er i kroner.

År	Gamal saldo	Renter	Avdrag	Total innbetaling	Ny saldo
1	50 000	$50\,000 \cdot 0{,}05 = 2500$	10 000	12 500	40 000
2	40 000	$40\,000 \cdot 0{,}05 = 2000$	10 000	12 000	30 000
3	30 000	$30\,000 \cdot 0{,}05 = 1500$	10 000	11 500	20 000
4	20 000	$20\,000 \cdot 0{,}05 = 1000$	10 000	11 000	10 000
5	10 000	$10\,000 \cdot 0{,}05 = 500$	10 000	10 500	0

Me ser at lånesaldoen er (eksakt) null etter fem år. Det tek altso fem år å betala ned lånet.

Øvingsoppgåve 5.39 (Serielån)**.** Lise har lånt 60 000 kroner til 10% rente. Kvart år betaler ho ned 12 000, i tillegg til rentene som påløp det året.

1. Kor mykje må ho betala kvart år?
2. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Øvingsoppgåve 5.40 (Serielån)**.** Helene har lånt 75 000 kroner til 5% rente. Kvart år betaler ho ned 5000, i tillegg til rentene som påløp det året. Kor lang tid tek det før lånet er nedbetalt?

Øvingsoppgåve 5.41 (Serielån)**.** Hilde har lånt 100 000 kroner til 5% rente. Ho skal betala ned over ti år. Kor mykje må ho betala i avdrag kvart år, utan å rekna med rentene?

Øvingsoppgåve 5.42 (Samanlikning av serie- og annuitetslån)**.** Olav vil låna 100 000 kroner. Renta er 4% med nedbetaling over fem år. Han har valget mellom eit serielån og eit annuitetslån med årleg innbetaling.

1. Set opp ein tabell som viser kva han må betala per år for serielånet.
2. Kor mykje må han betala totalt for serielånet, summert over fem år?
3. For annuitetslånet må han betala like mykje alle åra. Kor stort er dette beløpet?
4. Kor mykje må han betala totalt for annuitetslånet, summert over fem år?

Rekneregel 5.2 Gauss' formel

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{34}$$

5.10 Aritmetiske rekkjer†

Merknad 5.12. I dette avsnittet kjem me borti det som heiter aritmetiske rekkjer. Matematisk er dei enklare enn dei geometriske rekkjene som me har brukt hittil, men det er vanskeleg å finna enkle døme på praktisk bruk.

Oppgåvene me ser her er kompliserte, ved at me må bruka både aritmetiske og geometriske rekkjer, men dei er svært aktuelle for daglegdagse spareproblem.

Dersom det gjer det enklare, må du gjerne studera læreboka (kapittel 5.1–5.4) fyrst.

5.10.1 Månadleg sparing i eitt år

I forrige kapittel studerte me annuitetar, der renteperiodane og annuitetsperiodane fall saman, t.d. årleg sparing med årleg forrenting. I røynda er det vanleg å spara månadleg, men få rentene årleg. Då vert problemet meir samansett, men me kan løysa det likevel.

Eksempeloppgåve 5.43. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Pengar som berre har stått på konto ein del av året får rente berre for den tida dei har stått på konto. Ho set inn pengane på slutten av kvar månad frå januar til desember. Kor mykje har Jenny på konto etter renteutbetalinga 31. desember?

Løysing 5.20. Jenny set inn tolv tusenlappar, som for ulike rentepåslag. Den fyrste tusenlappen står 11 månader og får eit rentepåslag på

$$3\% \cdot \frac{11}{12} = 2{,}75\%$$

av beløpet. Det andre beløpet står ti månader og får

$$3\% \cdot \frac{10}{12} = 2{,}5\%$$

av beløpet. Slik held det fram slik at saldoen vert

$$\begin{aligned} S &= 1000 \cdot \left(1 + \frac{11 \cdot 3\%}{12}\right) + 1000 \cdot \left(1 + \frac{10 \cdot 3\%}{12}\right) + \ldots + 1000 \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 3\%}{12}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \left(1 + \frac{i \cdot 3\%}{12}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

Dette liknar litt på dei geometriske rekkjene som me har sett, men der er ein skilnad, me kaller det ei *aritmetisk rekkje.* Det kjem me tilbake til sidan.

Lat oss dela opp summen, slik at me ser innskota og rentene kvar for seg:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{11} \left(1000 + 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{11} 1000 + \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12}. \end{aligned} \tag{36}$$

Det fyrste ledded er simpelthen tolv innskot på 1000 kroner, til saman 12 000 kroner. Det andre leddet er rentene. Lat oss sjå litt nærare på dei. Sidan ledda i summen er produkt der dei fleste ledda er eins, kan me trekkja utanfor summeteiknet, slik:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=0}^{11} 1000 \cdot \frac{i \cdot 3\%}{12} \Big) \\ &= \frac{1000 \cdot 3\%}{12} \cdot \sum_{i=0}^{11} i \end{aligned} \tag{37}$$

Faktoren foran summeteiknet er rentebeløpet som éin tusenlapp tener på éin månad. Summen talet på månader som tusenlappane har stått til saman. Her kan me bruka Gauss' formel for rekneregel 5.2. Resultatet vert

$$\begin{aligned} R &= \frac{1000 \cdot 3\%}{12} \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} \\ &= \frac{1000 \cdot 3\% \cdot 11}{2} \\ &= 165. \end{aligned} \tag{38}$$

Saldoen på slutten av året er då

$$S = 12\,000 + 165 = 12\,165. \tag{39}$$

Merknad 5.13. I gamle dagar brukte ein 360 rentedagar i året, 30 rentedager i månaden, slik at ein ikkje fekk renter for den 31. i kvar månad, og doble eller tredoble renter siste dagen i februar. Dette var for å gjera jobben enkel for bokhaldarar som rekna for hand.

I dag får ein renter per kalenderdag. Datamaskiner har gjort at bankane klarer det. Prinsippet er det same; det er berre tala som vert styggare. For å læra prinsippet, reknar me for hand med 360 rentedagar i året. Løysinga over føreset 360 rentedagar i året.

Øvingsoppgåve 5.44. Anne Marie sparer 1200 kroner i månaden. Ho får 3,5% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Pengar som berre har stått på konto ein del av året får rente berre for den tida dei har stått på konto. Kor mykje har Anne Marie på konto etter renteutbetalinga 31. desember?

5.10.2 Månadleg sparing over tid

Eksempeloppgåve 5.45. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mykje har Lise Lotte på konto etter 10 år?

Løysing 5.21. Denne oppgåva er litt meir komplisert enn dei vi har sett tidlegare, fordi me både må rekne med månadlege sparebeløp og med renter éin gong i året over fleire år. For å dela opp problemet i løysbare delar, tek me ein liten omveg.

Fyrst lat oss merkje oss at me (i dette tilfellet) får like mykje renter på sparepengane, uansett om me deler det på fleire konti eller har alt på same. Lat oss difor tenkja oss at Jenny har to konti. Slik at ho sparer månadleg på konto 1, og overfører alle pengane med renter på slutten av kvart år til konto 2.

På konto 1 sparer ho altso akkurat som i oppgåve 5.43. Sparinga og rentesatsen er den same kvart år, og ho sparer dermed opp 12 165 kroner per år på denne kontoen.

På konto 2 overfører ho 12 165 kroner éin gong i året, like etter renteutbetalinga. Dette dannar dermed ei geometrisk rekkje som me er van med. Han set inn 10 slike beløp, der det fyrste får rente ni gongar og det siste null gongar. Saldoen vert dermed

$$S = \sum_{i=0}^{9} 12\,165 \cdot 1{,}03^i = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} = 139\,458{,}09.$$

Han sparer altso opp 139 458 kroner.

Øvingsoppgåve 5.46. Karl Anders sparer 2000 kroner i månaden. Han får 4% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mykje har Karl Anders på konto etter åtte år?

Øvingsoppgåve 5.47 (†). Kalle har 4% rente på sparekontoen og set inn 100 kr. per månad. Kor mykje har han på konto etter eitt år?

Han får rente på slutten av kvart år. Pengar som berre har stått på konto delar av året får rente i forhald til kor lenge dei har stått.

Øvingsoppgåve 5.48 (†). Lise har 2% rente på sparekontoen og set inn 500 kr. per månad. Kor mykje har ho på konto etter tolv år?

Ho får rente på slutten av kvart år. Pengar som berre har stått på konto delar av året får rente i forhald til kor lenge dei har stått.

5.10.3 Sparemål

Eksempeloppgåve 5.49. Jenny sparer 1000 kroner i månaden. Ho får 3% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mange år tek det før Jenny har spart 200 000 kroner?

Løysing 5.22. Her kan me bruka same tankesett som i oppgåve 5.45. Jenny sparer totalt 12 165 kroner per år inklusive renter på dei nye innskota. Over t år har ho spart

$$S = \sum_{i=0}^{t-1} 12\,165 \cdot 1{,}03^i = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^t - 1}{0{,}03}.$$

Når me veit at målet er $S = 200\,000$, får me ein eksponentiell likning

$$200\,000 = 12\,165 \cdot \frac{1{,}03^t - 1}{0{,}03}$$

som me forenklar til

$$\frac{200\,000 \cdot 0{,}03}{12\,165} = 1{,}03^t - 1$$

eller

$$1{,}03^t = \frac{200\,000 \cdot 0{,}03}{12\,165} + 1 = 1{,}493\,218.$$

Dette gjev

$$t = \frac{\ln 1{,}493\,218}{\ln 1{,}03} = 13{,}56.$$

Jenny treng altso mellom 13 og 14 år for å nå sparemålet.

Øvingsoppgåve 5.50. Anne Marie sparer 1200 kroner i månaden. Ho får 3,5% årleg rente, og rentene vert lagde til på slutten av året. Kor mange år tek det før Anne Marie har spart 200 000 kroner? (Bruk oppgåve 5.44 som mellomrekning.)

Øvingsoppgåve 5.51. I oppgåve 5.49 rekna me berre ut omtrentleg at Jenny trengte 13–14 år. Rekn ut nøyaktig kor mykje Jenny har på konto etter 13 år, og kor mykje ho då manglar på 200 000. Rekn so ut kor mange fleire månader ho må spara for å nå målet på 200 000. Hugs at ho ikkje får renter igjen før der er gått 12 nye månader.

5.11 Vidare lesing†

Bjørnestad *et al* dekkjer finansmatematikken i kapittel 5.5. Framstillinga deira legg stor vekt på å presentera formlar for ulike særtilfelle, og det vil vera svært krevjande å pugga alle og halda dei frå kvarandre. Me trur at de vil vera betre tjent med å studera korleis den eine formelen i rekneregel 5.1 kan brukast på mange ulike måtar, slik som me har freista i dette kapittelet.

Det teoretiske grunnlaget for finansmatematikken presenterer Bjørnestad *et al* i kapittel 5.1, 5.3 og 5.4. Det er ein god idé å gå gjennom denne teorien, og samanlikna dei abstrakte forklaringane i læreboka med dei praktiske løysingsteknikkane som me har presentert her.

Oppgåvene i læreboka er verd å gjera, særleg oppgåvene i kapittel 5.5.

6 Fleire Døme i Finansmatematikk†

Oppgåvene i dette kapittelet er var brukte på eksamen i 2017 og obligatoriske arbeidskrav 2018. Løysingsforslaga er relativt utførlege, og dei er tekne med for å gje eit breidare utval av oppgåver og døme.

6.1 Frå Arbeidskrav 2018

Eksempeloppgåve 6.1. Snorre og Synnøve har arva ein millon kroner kvar og set pengane i aksjefond. Snorre vel eit lågrisikofond og får 1,5% rente (avkasting) per år. Synnøve vel høgare risiko, og har flaks; ho får 2,5% rente.

1. Plott verdiutviklinga for både Snorre og Synnøve i same koordinatsystem frå innskotstidspunktet og femti år fram i tid.

2. Kor lang tid tek det før Snorre har fått dobla verdien?

3. Kor lang tid tek det før Synnøve har fått dobla verdien?

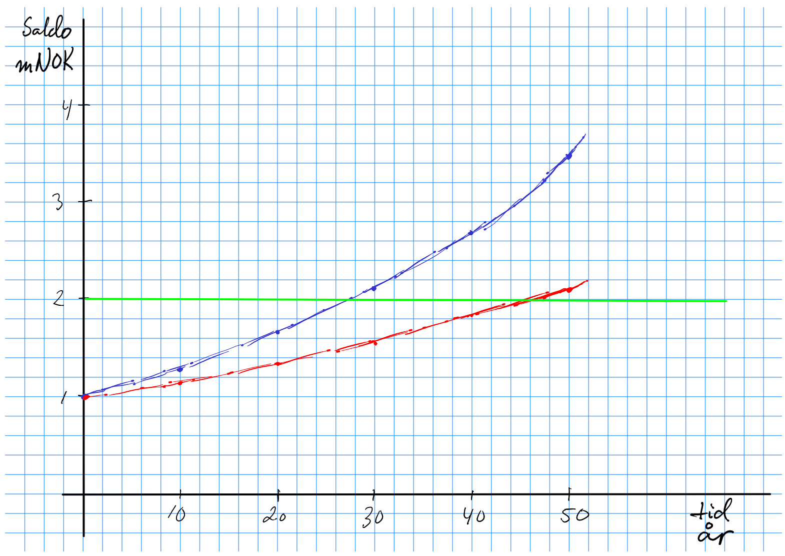
Løysing 6.1. Saldoen hennar Synnøve (i millionar kroner) kan skrivast som

$$S_1 = 1{,}025^t,$$

der t er tida i år. Tilsvarande er saldoen hans Snorre

$$S_2 = 1{,}015^t.$$

Me plottar båe funksjonane ved å rekna ut saldoen for $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ år.



Me ser på augemål at Snorre doblar saldoen etter cirka 45 år, og Synnøve etter rundt 27 år. For å finna nøyaktige tal, må me derimot løysa likninga $S_1 = 2$ for Synnøve og $S_2 = 2$ for Snorre.

For Synnøve har me då

$$2 = 1{,}025^t, \tag{40}$$
$$\ln 2 = \ln 1{,}025^t, \tag{41}$$
$$\ln 2 = t \cdot \ln 1{,}025, \tag{42}$$
$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}025} \approx 28{,}07. \tag{43}$$

Det tek altso litt meir enn 28 år før Synnøve har dobla saldoen. Plottet er med andre ord ikkje heilt presist, men det er akseptabelt.

For Snorre har me

$$2 = 1{,}015^t, \tag{44}$$
$$\ln 2 = \ln 1{,}015^t, \tag{45}$$
$$\ln 2 = t \cdot \ln 1{,}015, \tag{46}$$
$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}015} \approx 46{,}56. \tag{47}$$

Det tek altso litt cirka $45\frac{1}{2}$ år før Snorre har dobla saldoen. Igjen er plottet litt upresist men akseptabelt.

Merknad 6.1. Denne oppgåva gjev ein del tolkingsrom i korleis ein skal svara. Rådet er då å bruka både plottet og algebraen for å dobbelsjekka svaret, og styrka presentasjonen.

Oppgåva er definitivt relevant som eksamensoppgåve, men formuleringa vil normalt vera litt meir presis på eksamen.

Eksempeloppgåve 6.2. Du får tilbod om eit lån til 3% nominell rente per år, med månadleg forrenting. Der er ingen gebyr. Kva er den effektive rentesatsen?

Løysing 6.2. Rentesatsen på 3% per år, gjev $3\%/12 = 0{,}25\%$ rente per månad. Med månadleg forrenting, vert vekstfaktoren 1,0025 på ein månad. Over tolv månader vert vekstfaktoren

$$1{,}0025^{12} = 1{,}0304,$$

som svarer til ein effektiv rentesats på 3,04% per år.

Merknad 6.2. Dette problemet kan dukka opp på eksamen, sjølv om ein ikkje tidlegare har spurt om effektiv rentesats. Då kan ein rekna med at effektiv rente vert definert i oppgåva, men teknikken må ein kunna.

Eksempeloppgåve 6.3. Politikarane debatterer ny hovudveg, som evt. kan byggjast 2022–24. Kostnaden er venta å verta éin milliard kroner kvart år i byggjeperioden på tre år. Diskonteringsrenta er 4%. Rekn ut noverdien (per 2018) av dette prosjektet.

Løysing 6.3. Kostnaden omfattar tre beløp, om fire, fem og seks år. Me kan setja dei opp i ein tabell

År	Nominelt	Noverdi
2022	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^4 = 0{,}8548$
2023	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5 = 0{,}8219$
2024	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^6 = 0{,}7903$
Sum		2,4670

Noverdien av prosjektet er altso 2,467 milliardar kroner.

Merknad 6.3. Ein kan godt setja dette opp som ei geometrisk rekkje, men me berre tre ledd er gevinsten liten. Det beste er å bruka den teknikken som ein er tryggast på.

Merknad 6.4. Slike oppgåver kan dukka opp på eksamen, sjølv om det vil vera meir vanleg med oppgåver med fleire ledd i summen, slik at ein må setja det opp som ei geometrisk rekkje og bruka formel.

Eksempeloppgåve 6.4. Anne Sofie har 20 000 kr. i eit aksjefond. Ved slutten av kvart år får ho 5% avkasting og tek ut 1000 kr. Kor mange år går det før ho har brukt opp pengane?

Løysing 6.4. Avkastinga er $5\% \cdot 20\,000 = 1000$ kroner. Når ho tek ut 1000 kroner svarer det akkurat til avkastinga, og saldoen vert stabil på 20 000 kroner. Pengane hennar varer altso evig.

Merknad 6.5. Ein kan godt setja dette opp algebraisk (vha. ei geometrisk rekkje) og sjå at ein får divisjon med null. So snart ein ser at ho berre tek ut rentane, er derimot presentasjonen over enklare å skriva og enklare å forstå. Det enklaste er ofte det beste.

Merknad 6.6. Dette er kan vera ei eksamensoppgåve, sjølv om det er meir vanleg med ein variant der pengane vert brukte opp og svaret ikkje er uendeleg.

Eksempeloppgåve 6.5. Filip vurderer å kjøpa opp ei lita bedrift. Han trur at bedrifta har eit unikt konsept som vil gje 500 000 kroner i profitt kvart år i all framtid. Han reknar med ei diskonteringsrente på 3%. Kor mykje er han maksimalt viljug til å betala for bedrifta?

Løysing 6.5. Her er me interessert i kontantstraumen på $\frac{1}{2}$ million kroner per år, diskontert med 3% rente per år. Lat oss gå ut frå at den fyrste utbetalinga kjem umiddelbart. Det gjev den geometriske rekkja

$$S = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^2} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^3} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{1{,}03^4} + \cdots .$$

Der S er noverdien i millioner kroner. Her kan me bruka formelen for geometriske rekkjer:

$$S = 0{,}5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{\infty} - 1}{\frac{1}{1{,}03} - 1} = 0{,}5 \cdot \frac{-1}{\frac{1}{1{,}03} - 1} \approx 17{,}167.$$

Filip kan altso by inntil 17,167 millioner kroner utan å forventa tap.

Det er kanskje meir realistisk at den fyrste utbetalinga kjem om eitt år, og ikkje umiddelbart. Det forskyver heile kontantstraumen eitt år ut i framtida, og noverdien vert $S/1{,}03 \approx 16{,}667$ millionar kroner. Oppgåvå skriv ikkje når utbetalingane tek til.

Merknad 6.7. Mange vil lika å skriva rekkja med summeteikn

$$S = 0{,}5 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1{,}03^i}.$$

Det kan vera fornuftig, men det er viktig å understrekja at det berre er notasjon og får oss ikkje nærare ei løysing. Mao. det er smak og behag.

Merknad 6.8. Løysinga har gjeve to svar med ulik føresetnad. Det gjer ein gjerne i eit absolutt perfekt svar. Det er likevel fullstendig og korrekt å velja éin føresetnad og gje eitt svar. Oppgåva skriv ikkje når utbetalingane tek til, og ein står fritt til å velja. Valet *bør* kommenterast, men det er ein detalj.

Merknad 6.9. Dette er ei ganske typisk eksamensoppgåve.

6.2 Frå Eksamen 2017

Eksempeloppgåve 6.6. Du set 1000 kr. på konto til 2% rente.

1. Kva er saldoen etter seks år?
2. Kor mange år tek det før saldoen er 2000 kr.?

Vis korleis du kjem fram til svara.

Løysing 6.6. *Del 1.* Saldoen etter seks år er $1000 \cdot 1{,}02^6 \approx 1126{,}16$ kroner.

Del 2. Saldoen etter t år er

$$1000 \cdot 1{,}02^t = 2000$$

Dette er ei likning som me kan forenkla til

$$1{,}02^t = 2,$$

som gjev

$$t \ln 1{,}02 = \ln 2,$$

Ergo

$$t = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}02} \approx 35{,}00$$

Det tek altso 35 år å dobla saldoen.

Eksempeloppgåve 6.7. Per og Kari fekk ein genial idé då dei skreiv sisteårsoppgåve på studiet, og no vil dei starta bedrift. Dei trur at idéen deira kan gje ein profitt på éin million kronar ved utgangen av kvart år i fem år, før andre aktørar kjem etter og profitten forsvinn pga. konkurransen. Diskonteringsraten (rentenivået) er fem prosent.

1. Kva er noverdien til profitten?
2. Sett i staden at dei reknar med å vidareutvikla idéen og oppnå ein profitt på ein million per år til evig tid. Kva er noverdien til den evige profittstraumen?
3. Det kostar dei fem millionar å starta bedrifta. Kor mange år tek det før dei har tent inn oppstartkostnaden?

Vis korleis du kjem fram til svara.

Løysing 6.7. *Del 1.* Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05}\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{1{,}05^i}\\ &= \frac{1}{1{,}05}\frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5-1}{\frac{1}{1{,}05}-1}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^5-1}{-0{,}05}\\ &\approx 4{,}329\end{aligned} \tag{48}$$

Del 2. Noverdien (i millionar) er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1{,}05^i}\\ &= \frac{1}{1{,}05}\frac{-1}{\frac{1}{1{,}05}-1}\\ &= \frac{1}{0{,}05}\\ &= 20.\end{aligned} \tag{49}$$

Del 3. Set at det tek t år før noverdien når fem (millionar). Me skal finna talet t. Noverdien etter t år (i millionar) kan skrivast som

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{1{,}05^i} &= \frac{1}{1{,}05} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{1{,}05^i} \\ &= \frac{1}{1{,}05} \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{\frac{1}{1{,}05} - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{-0{,}05}\end{aligned} \tag{50}$$

Me skal då løysa likninga

$$5 = \frac{\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1}{-0{,}05} \tag{51}$$

eller

$$-0{,}25 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t - 1 \tag{52}$$

eller

$$0{,}75 = \left(\frac{1}{1{,}05}\right)^t \tag{53}$$

Dette gjev

$$\ln 0{,}75 = t \ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right) \tag{54}$$

eller

$$t = \frac{\ln 0{,}75}{\ln\left(\frac{1}{1{,}05}\right)} \approx 5{,}9 \tag{55}$$

Det tek altso 5,9 år å tena inn oppstartskostnaden.

Merknad 6.10 (Del 3). Oppgåva har to hovudsteg. Det eine er å setja opp likninga og det andre er å løysa ho. Det er rimeleg å gje halv uttelling for likninga og halv uttelling for løysinga.

Merknad 6.11. Det vesentlege i denne oppgåva er at studentane veit å tolka oppgåva og har ein løysingsmetode som verkar og som dei er trygg på. Ein skal ikkje leggja vekt på at dei vel den beste metoden. Del 1 kan løysast ved å tabulera heile kontantstraumen, og det er heilt greitt. Del 3 kan i alle fall løysast omtrentleg med tabell. Full uttelling føreset eksakt løysing, men ei omtrentleg løysing (litt mindre enn seks år) med god grunngjeving må gje minimum halv uttelling.

Del 2 er verre å tabulera, men ein skal ikkje avvisa gode forsøk som gjev vel underbygd innsikt i problemet.

7 Mappeoppgåver i Finansmatematikk

Du står ganske fritt når du vel oppgåver til mappa di, so lenge du dekkje alle dei tre hovudtemaa i emnet.

I Finansmatematikk er det vesentleg, som eit minimum, at du kan

1. bruka geometriske rekkjer til å rekna på kontantstraumar
2. bruka logaritmefunksjonen til å finna kor mange år det tek å nå eit sparemål.

Du må gjerna laga eigne oppgåver eller endra tala i oppgåvene i heftet. Dette gjeld særleg dersom du arbeider saman med andre gjennom semesteret. Det er best om du leverer inn oppgåver som ingen andre har brukt.

NB! Les vurderingskriteria før du vel kva oppgåver du vil levera inn.

Oppgåvene nedanfor er litt meir krevjande enn vekeoppgåvene. Dei to fyrste er rekneoppgåver som gjev lite rom for å vera original. Dei krev berre litt meir enn mange stjerneoppgåver. Tolkingsoppgåvene, og særleg dei to siste, kan varierast på so mange måtar, at sjølv om fleire tek utgangspunkt i den same oppgåvateksta, vert det likevel mange unike oppgåver.

Øvingsoppgåve 7.1 (Relativt enkel oppgåve)**.** Kjersti hadde 100 000 kr. i eit aksjefond. Ved slutten av kvart år får ho 5% avkasting og tek ut 1000kr. Kor mykje står att på fondet etter 20 år?

Øvingsoppgåve 7.2 (Vanskeleg rekneoppgåve)**.** Oppgåve 5 frå kontinuasjonseksamen våren 2017.

Øvingsoppgåve 7.3 (Tolkingsoppgåve)**.** I årets pandemi har der vore mykje tale om reproduksjonstalet R. Korleis tolkar me dette talet? Kva for ein matematisk funksjon ligg til grunn for å modellera smitteutbreiinga, og kva rolle har R i funksjonen? Kvifor er det so kritisk om R er større eller mindre enn 1?

Sjå for deg ein forenkla modell, der den sjuke personen alltid smittar andre nøyaktig éi veke etter at han sjølv vart smitta. Korleis kan du då modellera smitteutbreiinga etter x veker? Plott gjerne funksjonen.

I denne oppgåva må du bruka andre kjelder som du søkjer opp sjølv. Me er ute etter korleis *du* tolkar og forstår matematiske omgrep slik dei verte brukte både i finansmatematikken og i epidemimodellering. Det er ikkje korte og presise svar på einskildspørsmål som er interessant, men ein samla tolking av problemet.

Øvingsoppgåve 7.4 (Tolkingsoppgåve)**.** Slå opp faktiske pensjonstilbod i marknedet, anten det er tenestepensjonsordningar (Statens Pensjonskasse e.a.) eller private ordningar frå bankar og livsforsikringsselskap. Studér minst éi slik ordning i detalj, og finn ut kor mykje ho kostar og kor mykje ho gjev i pensjon, ved hjelp av dei matemaiske metodane som me har lært. Kva finn du ut?

Målet i denne oppgåva er sjølvsagt å sjå om matematikken me har studert hjelper deg på å forstå verkelege problem som ikkje er spesielt tilrettelagt som studentoppgåve. Det kan godt vera at dette er vanskeleg, og me kan godt diskutera dette i klassa.

Øvingsoppgåve 7.5 (Tolkingsoppgåve). Slå opp offentlege investeringsprosjekt, som vegar og andre byggeprosjekt, og få fatt i kostnadsrapportar. Studér minst eitt prosjekt i detalj, og finn ut korleis dei bruker noverdi. Kva er kostnaden i noverdi og kva er kostnaden i laupande kroner? Tilsvarende med samfunnsnytta.

Kostnadsrapportane kan vera vanskeleg å finna, men dei skal vera offentleg informasjon når dei verte handsama i folkevalde organ.

Målet i denne oppgåva er sjølvsagt å sjå om matematikken me har studert hjelper deg på å forstå verkelege problem som ikkje er spesielt tilrettelagt som studentoppgåve. Det kan godt vera at dette er vanskeleg, og me kan godt diskutera dette i klassa. Kom og spør, gjerne etter å ha drøfta problemet i ei mindre gruppe.

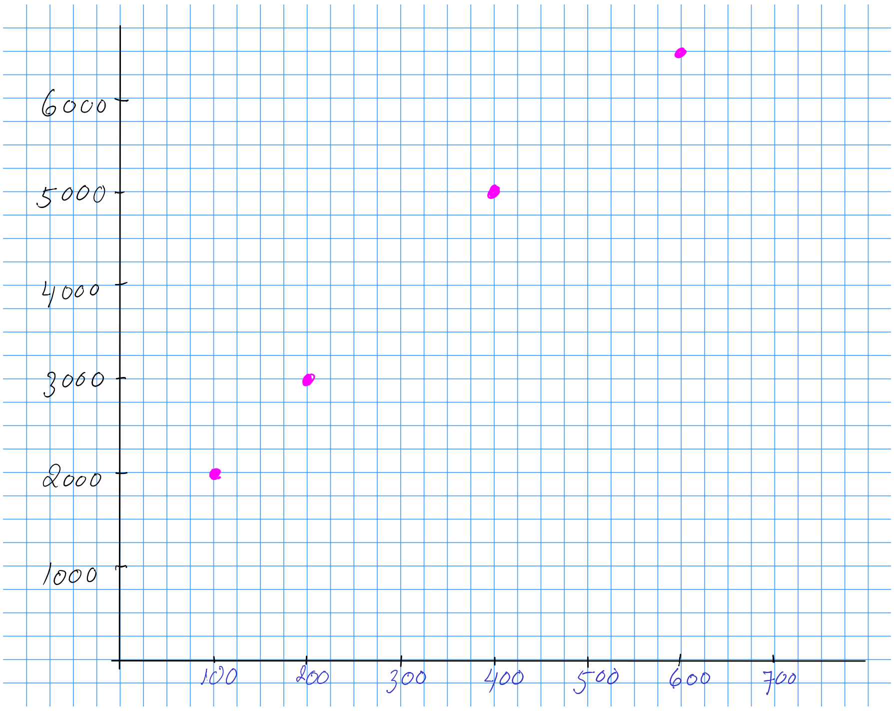
8 Veke 7. Lineær kostnad og inntekt

8.1 Todimensjonal graf

Øvingsoppgåve 8.1. Piddien sel strikkevantar. Han tener 100 kroner på kvart par han sel. Kor mykje tener han når han sel ti par?

Eksempeloppgåve 8.2. Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Dei har rekna på kostnadene ved ulike produksjonsvolum, og kome fram til fylgjande. Produksjon av 100 dingsar: kr. 2000; 200 dingsar: kr. 3000; 400 dingsar: kr. 5000; 600 dingsar: kr. 6500. Visualiser samanhengen mellom produksjonsvolum og kostnad i eit plott.

Løysing 8.1.



Øvingsoppgåve 8.3 (fortsetjing av forrige oppgåve)**.** Ålesund Dings og Profitt AS har rekna ut ytterlegare eit par kostnadsdøme. Produksjon av 300 dingsar: kr. 4000 og produksjon av 700 dingsar: kr. 6400. Legg til desse to datapunkta i løysinga frå forrige oppgåve.

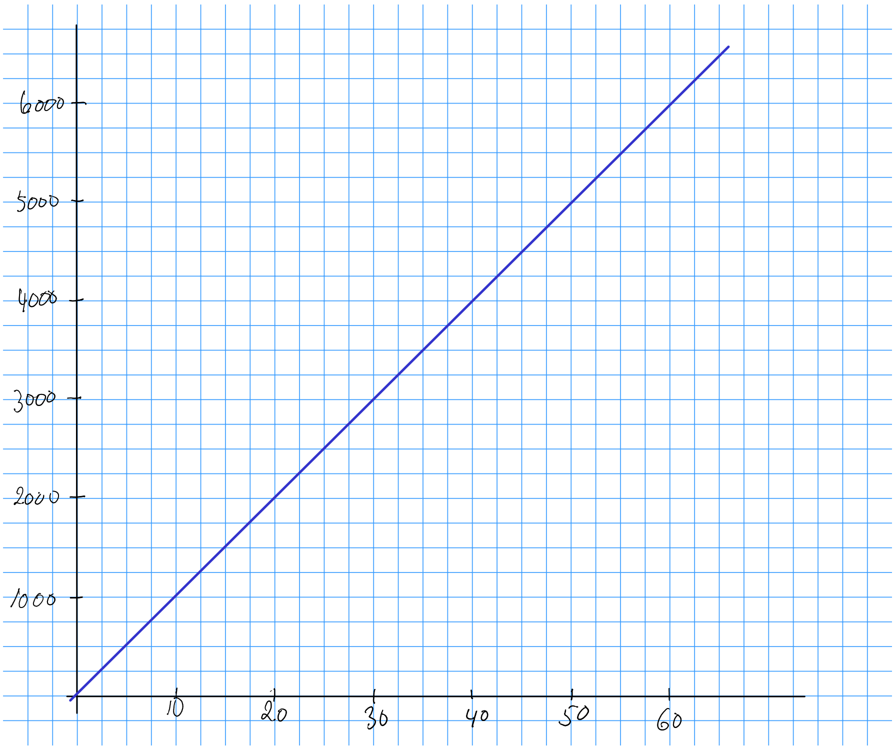
Eksempeloppgåve 8.4. Piddien sel strikkevantar. Han tener 100 kroner på kvart par han sel. Kor mykje tener han når han sel x par vantar?

1. Skriv ned ein funksjon som gjev inntekten for x par solgte vantar.
2. Illustrer samanhengen mellom x og samanlagd inntekt grafisk.

Løysing 8.2. Piddien tener 100 kroner per par. Når han sel x par, tener han $100 \cdot x$. kroner Som ein funksjon kan me skriva

$$I(x) = 100 \cdot x,$$

der $I(x)$ er inntekta gjeve at han sel x par.



Øvingsoppgåve 8.5. Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utsalsprisen er 25 kroner per dings.

1. Skriv ned ein funksjon som gjev bruttoinntekta (dvs. før utgiftene er trekt frå) når dei sel x dingsar.

2. Illustrer samanhengen mellom x og inntekta grafisk.

Eksempeloppgåve 8.6. Lat oss studera produksjonskostnaden hos Ålesund Dings og Profitt AS. Dei har faste kostnader på 1000 kroner; dvs. 1000 kr. som dei må betala uansett kor mange dingsar dei produserer. I tillegg kostar det 10 kroner for kvar dings som vert produsert.

1. Skriv ned ein funksjon som gjev kostnadene ved produksjon av x dingsar.

2. Illustrer samanhengen mellom x og kostnadene grafisk.

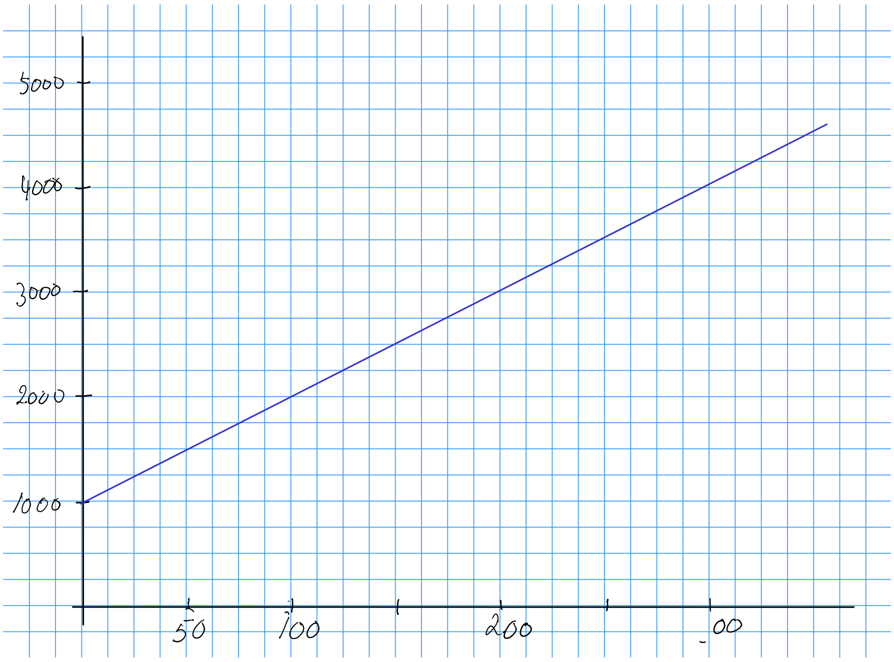
Løysing 8.3. Dette er eit modelleringsproblem der modellen er kostnadsfunksjonen som skildrar kostnadene som bedrifta har.

Me har to typar kostnader. Dei betaler 10 kr per dings og produserer x dingsar. Det vert totalt $10x$ kr i *variable kostnader*. Dei andre kostnadene er faste, eller konstante, på 1000 kr. Dei samla kostnadene er summen av alle typar kostnader, altso $1000 + 10x$.

Lat oss kalla funksjonen for $K(x)$, berre for å ha eit namn. Då skriv me

$$K(x) = 1000 + 10x.$$

Det er svaret på del 1.



Øvingsoppgåve 8.7. Skreddar Skår lever av å selja handsydde dressar. Han bruker 225 000 kroner i året på faste utgifter til verkstaden (husleige og utstyr). Til kvar dress treng han òg 2000 kroner i materialar. Set opp ein kostnadsfunksjon for skreddaren og plott funksjonen i eit rutenett.

Merknad 8.1. Legg merke til samanhengen mellom ein funksjon og ein graf. Me kan finna det produksjonsvolumet som me ynskjer på x-aksen (horisontalaksen), og lesa av kor mykje produksjonen kostar på y-aksen (vertikalaksen). Då er det kostnadsfunksjon som me les av.

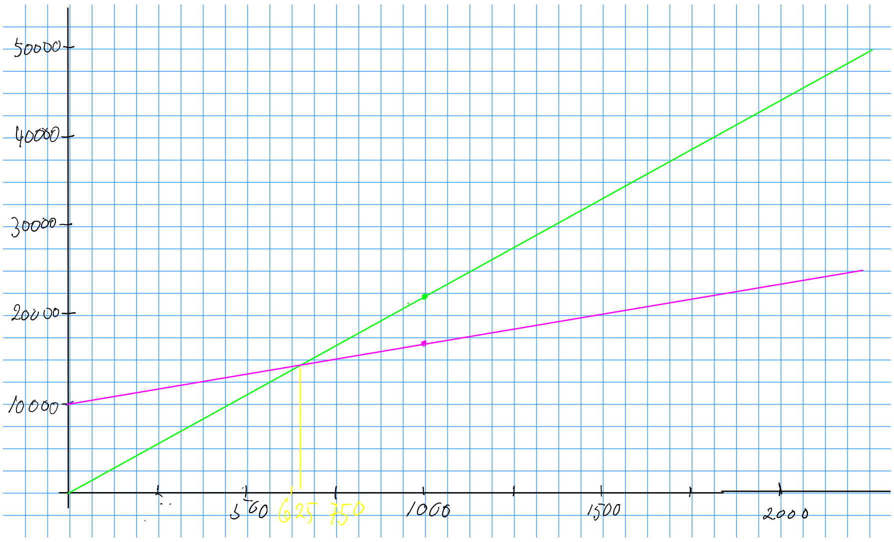
Me kan òg lesa den *inverse funksjonen* av det same plottet. Tenk deg at me veit kva me har råd til å betala i produksjonskostnad. Denne kostnaden kan me finna på y-aksen, og vha. kurva finn me kva produksjonsvolum me kan makta på x-aksen.

8.2 Likning i éin ukjend

Eksempeloppgåve 8.8. Lat oss studera økonomien i det lokale bryggeriet. Prisen dei får frå serveringsstadene er 22 kroner per liter øl, som gjev inntektsfunksjonen $I(x) = 22x$. Dei har 10 000 kroner i faste kostnader, og 7 kroner per liter i variable kostader. Dvs. at kostnadsfunksjonen er $K(x) = 10000 + 7x$.

1. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.
2. Basert på plottet, omtrent kor mange liter øl må bryggeriet selja for å gå i balanse.

Løysing 8.4.



Der linene kryssar, er inntekta like stor som kostnaden, og bryggeriet går i balanse. Me ser ikkje eksakt på literen kvar det skjer, men me ser at det skjer i ruta mellom 625 liter og $677\frac{1}{2}$ liter. Lat oss seia cirka 650 liter.

Merknad 8.2. I oppgåve 8.11 skal me sjå at eksakt svar er $666\frac{2}{3}$ liter, men so nøyaktig klarer me ikkje å sjå på eit handteikna plott på so grovt rutenett.

Øvingsoppgåve 8.9. Sandtaket på Mo sel sand for 600 kr tonnet, slik at dei har inntektsfunksjonen $I(x) = 600 \cdot x$. Kostnaden for å produsera eit tonn sand er 300 kr, i tillegg til faste kostnader på 100 000 kr. Dvs. at kostnadsfunksjonen er $K(x) = 100\,000 + 300x$.

1. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.
2. Basert på plottet, omtrent kor mange tonn sand må sandtaket selja for å gå i balanse?

Øvingsoppgåve 8.10. Lasses bensinstasjon sel bensinen for 16 kr literen. Bensinen kostar 8 kr i innkjøp. I tillegg kostar det 32 000 kr å halda bensinstasjonen i drift.

1. Sett opp ein inntektsfunksjon $I(x)$ for Lasse.
2. Sett opp ein kostnadsfunksjon $K(x)$ for Lasse.
3. Plott $K(s)$ og $I(x)$ i same koordinatsystem.
4. Basert på plottet, omtrent kor mange liter bensin må Lasse selja for å gå i balanse?

Eksempeloppgåve 8.11. Lat oss gå tilbake til bryggeriet i oppgåve 8.8. Finn eksakt produksjonsvolum x som gjev balanse mellom inntektene gjeve som $I(x) = 22x$ og kostnadene gjeve som $K(x) = 10000 + 7x$.

Løysing 8.5. Balanse vil seia at kostnadene er lik inntektene, mao.

$$I(x) = K(x), \tag{56}$$

$$22x = 10000 + 7x. \tag{57}$$

Dei to sidene i likninga er like. Om me gjer same operasjon på båe sider, er dei stadig like. Målet no er å bli kvitt x-en på den eine sida, so me trekk frå $7x$; slik:

$$22x - 7x = 10000 + 7x - 7x, \tag{58}$$

$$15x = 10000. \tag{59}$$

No har me eit uttrykk for $15x$, men me vil ha eit uttrykk for ein x. Då må må me dela på 15, slik:

$$x = \frac{10000}{15} = 666{,}67. \tag{60}$$

Bryggeriet må altso produsera 666,67 liter øl for å gå i balanse.

Øvingsoppgåve 8.12. Lat oss sjå igjen på Sandtaket på Mo frå oppgåve 8.9. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 600 \cdot x$ og kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000 + 300x$. Finn produksjonsvolument x som gjev balanse i drifta.

Øvingsoppgåve 8.13. Gå tilbake til Lasses bensinstasjon i oppgåve 8.10. Bruk inntektsfunksjonen og kostnadsfunksjonen som du fann, og finn ut kor mykje bensin Lasse må selja får å gå i balanse.

Eksempeloppgåve 8.14. Hilde går på sirkus saman med to nevøar. Hilde betaler vaksenbillett, medan nevøane får barnebillett. Barnebilletten kostar to tredjedelar av vaksenbilletten. Til saman betaler dei 420 kroner. Kor mykje kostar vaksenbilletten?

Løysing 8.6. Her må me setja opp ein modell over billettprisane. Dette kan gjerast på litt ulike måtar, avhengig av kor mykje ein gjer i hodet og kva ein helst vil ha skrive ned.

Lat x vera prisen på vaksenbilletten. Det er talet som me vert spurde om. Me kan la prisen på barnebilletten vera y. Totalprisen kan me då skriva som $x + 2y$ kroner. Me har òg fått vita at totalprisen er 420 kroner. Dette gjev ei likning:

$$420 = x + 2y.$$

Likninga har to ukjende, men ho er lett å forenkla. Oppgåva seier at barnebilletten er to tredjedelar av vaksenbilletten. Matematisk kan me skriva

$$y = \frac{2}{3} \cdot x.$$

No kan me byta ut prisen y i den fyrste likninga:

$$420 = x + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x,$$

og då har likninga berre éin ukjend. Me kan verta kvitt brøken ved å gonga gjennom med nemnaren:

$$3 \cdot 420 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x,$$

eller

$$1260 = 3 \cdot x + 4 \cdot x = 7x.$$

Ein x er ein sjuandedel av $7x$, so me kan skriva

$$x = \frac{1260}{7} = 180.$$

Vaksenbilletten kostar altso 180 kroner.

Øvingsoppgåve 8.15. Mor, far og tre born tek bussen. Dei betaler 140 kroner totalt. Barnebilletten kostar halvparten av vaksenbilletten. Kor mykje kostar ein vaksenbillett?

Øvingsoppgåve 8.16. Harry kjøper to liter mjølk og åtte liter øl. Mjølka kostar 18 kroner literen og han betaler 630 kroner totalt. Kor mykje kostar ølet per liter?

Øvingsoppgåve 8.17. Line blandar saft i forholdet 1:4, dvs. fire gongar so mykje vatn som saft. Ho får åtte desiliter ferdig saft. Kor mykje konsentrert saft har ho brukt?

8.3 Profittfunksjonen

Eksempeloppgåve 8.18. Me skal sjå litt meir på bryggeriet frå oppgåve 8.8. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 22x$, og kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000 + 7x$.

1. Finn ein funksjon som fortel kor mykje bryggeriet tener (profitten) når dei produserer og sel x liter øl.

2. Plott funksjonen og samanlikn han med løysinga frå oppgåve 8.8.

Løysing 8.7. Profitten er differansen mellom inntekt og kostnad, altso

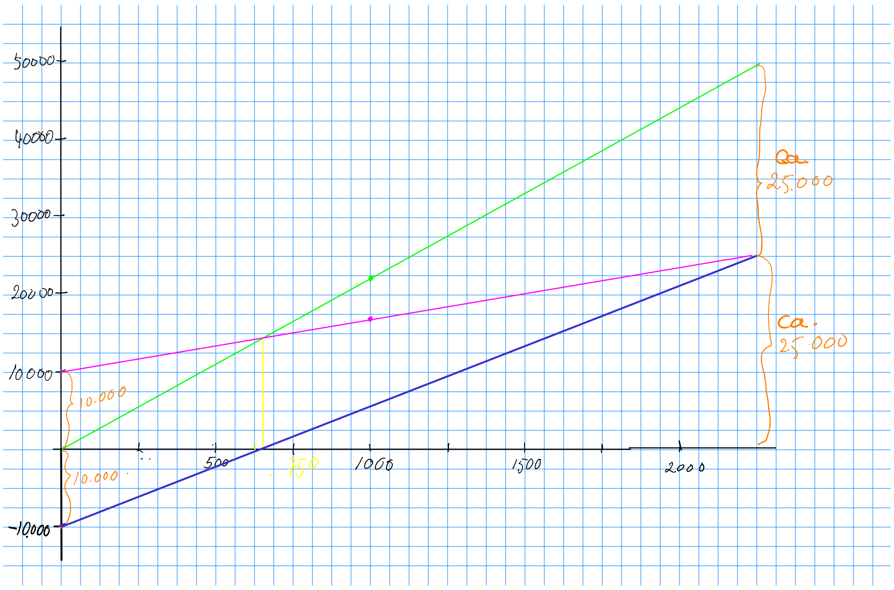
$$P(x) = I(x) - K(x).$$

Sidan kostnaden og inntekta er funksjonar av produksjonsvolumet x, so må profitten $P(x)$ òg vera det.

Om me set inn, får me

$$P(x) = 22x - (10\,000 + 7x) = 15x - 10\,000.$$

Grafisk ser det slik ut:



Her har me plotta i same diagram som kostnads- og inntektsfunksjonen, for å kunna samanlikna. Me kan dobbelsjekka at den vertikale avstanden mellom inntekt og kostnad er lik avstanden mellom profitt og null (dvs. x-aksen).

Øvingsoppgåve 8.19. Lat oss gå tilbake til sandtaket på Mo i oppgåve 8.9. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 600 \cdot x$ og kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000 + 300x$.

1. Finn ein funksjon som fortel kor mykje sandtaket tener (profitten) når dei produserer og sel x tonn sand.

2. Plott funksjonen og samanlikn han med løysinga frå oppgåve 8.9.

Merknad 8.3. Funksjonen som me fann i oppgåva over vert gjerne kalla *profittfunksjonen*.

Definisjon 8.1 (Lineær funksjon)**.** Alle funksjonane som me har studert so langt har formen $f(x) = a \cdot x + b$ og når me plottar dei, får me ei rett line. Difor kallar me slike funksjonar lineære.

Definisjon 8.2 (Lineær likning)**.** Når me krev at to funksjonuttrykk skal vera like, f.eks. for å finna balansen mellom kostnad og inntekt, får me ei *likning*, t.d.

$$K(x) = I(x).$$

Når båe sidene i likninga er lineære funksjonar, so seier me at det er ei *lineær likning*.

8.4 Grense- og gjennomsnittskostnad

Eksempeloppgåve 8.20. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10\,000 + 7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Kor mykje kostar det å auka produksjonen med ein liter?

Løysing 8.8 (Enkelt og greitt)**.** Me kan lesa kostnadsfunksjonen som 10000 kroner i faste kostnader og sju kroner per liter i variable kostnader. Den einaste endringa når me aukar produksjonen er i dei variable kostnadene på sju kroner per liter. Når me aukar produksjonen med ein liter, kostar det altso sju kroner meir.

Løysing 8.9 (Litt omstendeleg)**.** Når kostnadsfunksjonen vert meir komplisert, er ein ofte nøydd til å bruka ein meir abstrakt metode. Lat oss seia at produksjonen aukar frå x liter til $x + 1$ liter. Kostnaden aukar då frå $K(x)$ til $K(x + 1)$, og endringa er

$$\Delta K = K(x+1) - K(x) = \big[10000 + 7(x+1)\big] - \big[10000 + 7x\big].$$

Når me løyser opp parentesene får me

$$\Delta K = 10000 + 7(x+1) - 10000 - 7x = 7x + 7 - 7x = 7.$$

Kostnaden aukar altso med sju kroner.

Øvingsoppgåve 8.21. Sandtaket på Mo har kostnadsfunksjonen $K(x) = 100\,000 + 300x$, der x er produksjonsvolumet i tonn sand. Kor mykje kostar det å auka produksjonen med eitt tonn?

Definisjon 8.3. Lat $f(x) = a \cdot x + b$ vera ein lineær funksjon. Koeffisienten a vert kalla *stigningstalet*, og b er *konstandleddet*.

Merknad 8.4. Stigningstalet a i ein lineær kostnadsfunksjon $K(x) = ax + b$ vert kalla *grensekostnaden*. Me skal koma tilbake til dette omgrepet og definera grensekostnad for kostnadsfunksjonar som ikkje treng vera lineære.

Øvingsoppgåve 8.22. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen $K(x) = ax + b$. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen med éi eining?

Eksempeloppgåve 8.23. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000 + 7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 2000 liter øl. Kor mykje kostar det, i gjennomsnitt, å produsera ein liter øl?

Løysing 8.10. Totalkostnaden ved produksjon av 2000 liter er

$$K(x = 2000) = 10000 + 7 \cdot 2000 = 24\,000.$$

Gjennomsnittleg kostnad per liter vert då

$$\frac{K(x = 2000)}{2000} = \frac{24\,000}{2000} = 12.$$

Ein liter øl kostar altso 12 kroner å produsera i gjennomsnitt.

Merknad 8.5. Kostnaden per liter som me rekna ut ovanfor, vert gjerne kalla *gjennomsnittskostnaden* eller *einingskostnaden*.

Øvingsoppgåve 8.24. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000+7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 3000 liter øl. Kor mykje kostar det, i gjennomsnitt, å produsera ein liter øl?

Øvingsoppgåve 8.25. Det lokale bryggeriet har kostnadsfunksjonen $K(x) = 10000+7x$, der x er produksjonsvolumet i liter øl. Dei produserer 1000 liter øl.

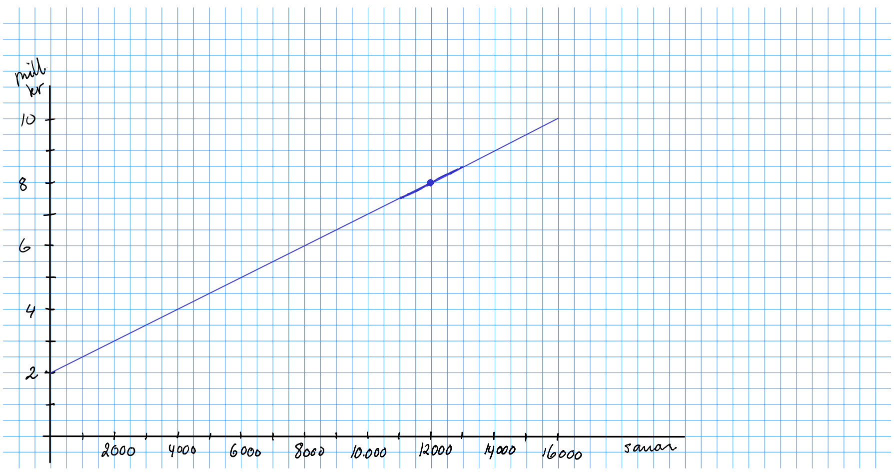
1. Tenk over før du reknar: Vert gjennomsnittskostnaden høgare eller lågare enn i forrige oppgåve der produksjonen var 3000 liter?
2. Finn gjennomsnittskostnaden.

8.5 Lina gjennom to punkt †

Eksempeloppgåve 8.26. Hansens slakteri slakta 12.000 sauar i 2017. Dette gav totale produksjonskostnader på åtte millionar kroner. Dei estimerer at den variable kostnaden per sau levert frå slakteriet er 500 kroner, og går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Teikn kostnadsfunksjonen i eit rutenett.

Løysing 8.11. Me kjenner eit punkt i plottet, kostnaden på 8 mill. kr. for 12 000 sauar. Det er det fyrste punktet me plottar.

Dersom me aukar produksjonen med 1000 sauar til 500 kroner per stykk, aukar kostnaden med ein halv million. Denne endringa kan me teikna som eit kort linestykke. Likeeins, dersom ein reduserer produksjonen med 1000 sauar, går kostnaden ned med ein halv million.



Sidan ekstrakostnaden per sau er konstant, kan me forlengja lina med konstant stigningstal.

Merknad 8.6. Legg merke til at årstalet 2017 er irrelevant for løysinga. Det speler inga rolle når slakteriet observerte produksjonskostnaden. Den typen «støy» i oppgåveteksta må ein øva seg til å handtera, fordi slik støy og overflødig informasjon er ein del av livet.

Her er ein video til ettertanke: `https://www.youtube.com/watch?v=kibaFBgaPx4`.

Øvingsoppgåve 8.27. Kari er konditor og sel kaker. Kvar kake kostar 60 kroner i råvarer. I januar produserte Kari 400 kaker og hadde samla kostnader på 38 000 når husleige, løn til lærlingen og alt anna er medrekna. Teikn kostnadsfunksjonen i eit rutenett.

Eksempeloppgåve 8.28. Hansens slakteri slakta 12.000 sauar i 2017. Dette gav totale produksjonskostnader på åtte millionar kroner. Dei estimerer at dei variable kostnaden per sau levert frå slakteriet er 500 kroner, og går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen.

Løysing 8.12 (Faste og variable kostnader)**.** Her er det mange opplysingar, so me må strukturera dei litt. Det er fornuftig å starta med ein matematisk form for svaret som me skal fram til, altso ein lineær kostnadsfunksjon, som ser slik ut:

$$K(x) = ax + b.$$

Her er a den variable kostnaden per sau, og b er dei faste kostnadene. Lat oss seia at a og b er målte i kroner.

Dei variable kostnadene er gjevne i oppgåva som $a = 500$. Den faste kostnaden b er ukjend, men me veit at kostaden for 12.000 sauar kan skrivast som

$$K(x = 12\,000) = 500 \cdot 12\,000 + b = 8\,000\,000.$$

Då ser me at dei variable kostnadene for 12.000 sauar er

$$500 \cdot 12\,000 = 6\,000\,000.$$

Sidan dei totale kostnadene er åtte millionar, må dei fast kostnadene vera to millionar, og me kan skriva

$$K(x) = 500 \cdot x + 2\,000\,000.$$

Øvingsoppgåve 8.29. Kari er konditor og sel kaker. Kvar kake kostar 60 kroner i råvarer. I januar produserte Kari 400 kaker og hadde samla kostnader på 38 000 når husleige, løn til lærlingen og alt anna er medrekna. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen.

Eksempeloppgåve 8.30. Dingsemakaren har erfart at produksjonskostnadene er 20.000 kroner i ein månad der han produserer 200 dingsar. Når han produserer 300 dingsar per månad, er produksjonskostnadene 25.000 kroner. Me går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Kva er dei variable kostnadene per dings?

Løysing 8.13. Me skal finna dei variable kostnadene. Då kan me ta utgangspunkt i variasjonen mellom dei to produksjonsvoluma som er kjende.

	Volum	Kostnad
Andre fall	300	25.000
Fyrste fall	200	20.000
Skilnad	100	5.000

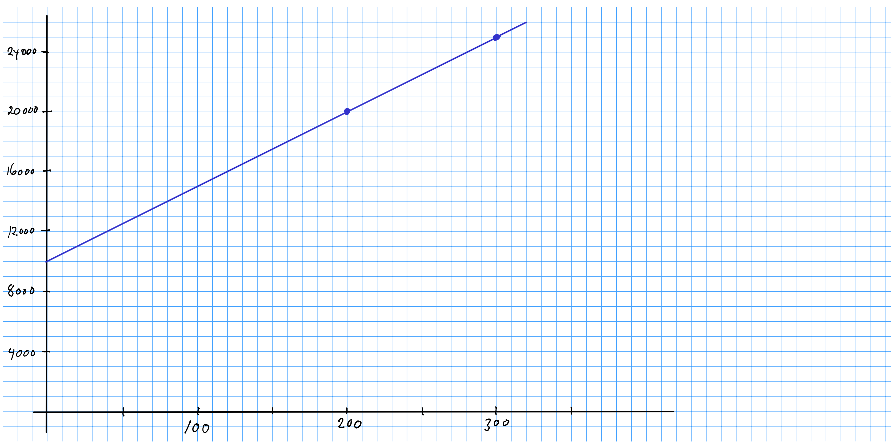
Ei auke på 100 dingsar kostar altso 5000 kroner, eller 50 kroner per dings.

Øvingsoppgåve 8.31. Skomakar Hagen kan produsera 25 par sko på ein månad til ein samla kostnad på 16.000 kroner. Han kan klara 30 par sko til ein kostnad på 18.000 kroner. Me går ut frå at kostnadsfunksjonen er lineær. Kva er dei variable kostnadene per skopar?

Eksempeloppgåve 8.32. Dingsemakaren har erfart at produksjonskostnadene er 20.000 kroner i ein månad der han produserer 200 dingsar. Når han produserer 300 dingsar per månad, er produksjonskostnadene 25.000 kroner.

1. Plott dei to kostnadsdøma i eit koordinatsystem, og teikn ei rett line gjennom punkta.
2. Finn ein lineær kostnadsfunksjon som passar med kostnadsdøma.
3. Me kan lesa lina i plottet som ein funksjon. Samanlikn han med kostnadsfunksjonen i pkt. 2. Er det same funksjon?

Løysing 8.14. Plottet er rett fram å teikna:



Me ser at kostnaden aukar med 5000 kroner når produksjonen aukar med 100 dingsar. Det gjev ei auke på 50 kroner/dings. Dette er den variable kostnaden, eller stigningstalet på funksjonen, og kostnadsfunksjonen må altso vera $K(x) = 50x + b$ for ein eller annan faste kostnad b.

For 200 dingsar utgjer dei variable kostnadene $200 \cdot 50 = 10000$ kroner, utav 20000 kroner i totale kostnader. Dvs. at dei faste kostnadene må vera 10000 kroner. Kostnadsfunksjonen er då

$$K(x) = 50x + 10000.$$

I plottet ser me at lina kryssar y-aksen ved 10 000 kroner. Det er kostnaden ved nullproduksjon som me ser stemmer med konstantleddet i $K(x)$. Me kan òg sjå at stigningstalet er 50, eller 5000 kroner per 100 dingsar, både i plottet og i funksjonsuttrykket.

Figuren er eit plott av $K(x)$.

Øvingsoppgåve 8.33. Skomakar Hagen kan produsera 25 par sko på ein månad til ein samla kostnad på 16.000 kroner. Han kan klara 30 par sko til ein kostnad på 18.000 kroner

1. Plott dei to kostnadsdøma i eit koordinatsystem, og teikn ei rett line gjennom punkta.
2. Finn ein lineær kostnadsfunksjon som passar med kostnadsdøma.
3. Me kan lesa lina i plottet som ein funksjon. Samanlikn han med kostnadsfunksjon i pkt. 2. Er det same funksjon?

Øvingsoppgåve 8.34 (Abstrakt)**.** Ei line går gjennom punkta $(0, 1)$ og $(2, 3)$ i eit koordinatsystem. Finn ein funksjon som beskriv lina.

8.6 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.12, 1.13, 1.17 (likningar), kapittel 2.1, 2.3–2.4 (graf og funksjonar).

Merk at kapittel 2.2 er berre for spesielt interesserte.

Øvingsoppgåve 8.35 (†)**.**
- Læreboka, oppgåve 1.38
- Læreboka, oppgåve 2.7
- Læreboka, oppgåve 2.12–13

Øvingsoppgåve 8.36 (†)**.**
- Læreboka, oppgåve 2.19–21
- Læreboka, oppgåve 2.9–11

9 Veke 8. Kvadratiske kostnadsfunksjonar

9.1 Introduksjon

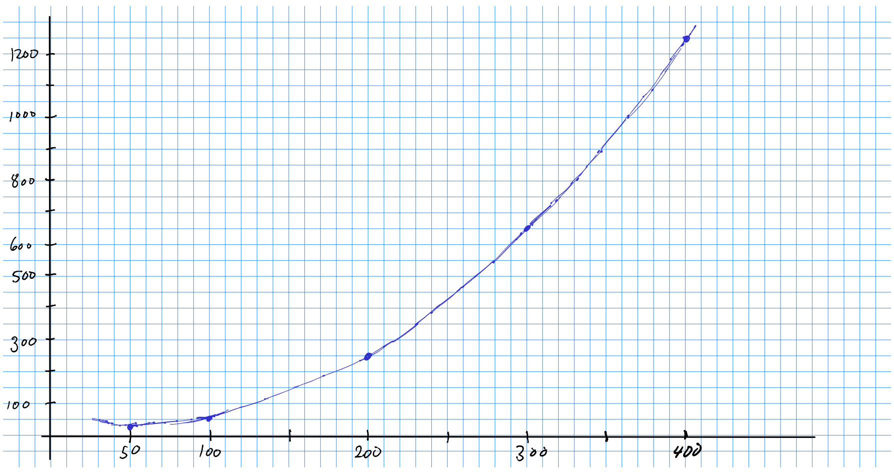
Eksempeloppgåve 9.1. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$. Skisser kostnadsfunksjonen i eit koordinatsystem.

Løysing 9.1. Når funksjonen ikkje er lineær, treng me nokre forskjellige punkt for å finna formen. Lat oss tabulera fyrst.

x	$K(x)$
50	25
100	50
200	250
300	650
400	1250



Øvingsoppgåve 9.2. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = 0{,}08 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 4000,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. (Me føreset at $x > 0$.) Skisser kostnadsfunksjonen i eit koordinatsystem.

Merknad 9.1. Kostnadsfunksjonane over er døme på *kvadratiske funksjonar*, eller *andregradsfunksjonar* som dei òg vert kalt. Ein kvadratisk funksjon har formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Når me plottar ein kvadratisk funksjon, får me ein form som vert kalt ein *parabel*, men denne formen kjem ikkje skikkeleg til syne i løysingane over, fordi me ikkje viser negative verdiar av x.

Eksempeloppgåve 9.3. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$.

1. Sett at bedrifta produserer $x = 100$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 101?
2. Sett at bedrifta produserer $x = 500$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 501?

Løysing 9.2. Lat oss rekna ut kostnaden for dei ulike produksjonsvoluma. Me skriv $\Delta K = K(x+1) - K(x)$ for kostnadsendringa.

x	$x+1$	$K(x+1)$	$K(x)$	ΔK
100	101	51,01	50	1,01
500	501	2059,01	2050	9,01

Det kostar altso kr. 1,01 å auka produksjonen frå 100 til 101, og kr. 9,01 frå 500 til 501.

Merknad 9.2. Med lineære kostnadsfunksjonen hadde me variable kostnader som utgjorde eit fast beløp per produsert eining. Det er interessant å sjå at dette ikkje er tilfelle med kvadratiske funksjonar.

Øvingsoppgåve 9.4. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = 0{,}08 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 4000,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. (Me føreset at $x > 0$.)

1. Sett at bedrifta produserer $x = 20$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 21?
2. Sett at bedrifta produserer $x = 40$ einingar. Kor mykje ekstra kostar det å auka produksjonen til 41?

9.2 Balanse: den kvadratiske likninga

Eksempeloppgåve 9.5. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} - x + 50.$$

Rekneregel 9.1 Rekneregel: Løysing av andregradslikning.

Når ei likning er gjeve som

$$0 = ax^2 + bx + c, \tag{61}$$

er løysinga gjeve som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dersom uttrykket $b^2 - 4ac$ er negativt, er rotuttrykket ikkje definert og likninga har inga løysing.

Formen (61) kan me kalla for standardformen for ei andregradslikning.

Kostnadsfunksjonen gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x > 50$. Bedrifta sel produktet for ei krone per eining. Kor mykje skal dei produsera og selja for å gå akkurat i balanse?

Løysing 9.3. Me har berre fått oppgjeve kostnadsfunksjonen $K(x)$ og ikkje inntektsfunksjonen $I(x)$. Me har derimot prisen $p = 1$, so me kan skriva

$$I(x) = x.$$

Balansepunktet er gjeve som $K(x) = I(x)$, eller

$$\frac{x^2}{100} - x + 50 = x.$$

Dette er ei andregradslikning sidan alle ledda er anten konstante (uavhengige av x), eller ein konstant gonga med x eller x^2. Likninga er derimot ikkje på standardform, og me må rydda opp før me kan bruka formelen (Rekneregel 9.1).

Me trekk frå x på båe sider av likninga og får

$$\frac{x^2}{100} - 2 \cdot x + 50 = 0.$$

Me kan òg setja x^2 utanfor brøken:

$$\frac{1}{100} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 50 = 0.$$

No er det lett å sjå at me har standardformen med $a = 1/100$, $b = -2$ og $c = 50$.

Innsetjing gjev

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50}}{2 \cdot \frac{1}{100}}.$$

Me kan rekna ut dei ulike ledda og få

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{\frac{1}{50}},$$

eller

$$x = 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} \approx 100 \pm 70{,}71,$$

Dette gjev to nullpunkt, $x \approx 29{,}3$ og $x \approx 170{,}7$, men oppgåva føreset $x > 50$ for at kostnadsfunksjonen skal vera gyldig, so berre den siste løysinga er gyldig.

Bedrifta går i balanse når dei produserer 170,7 liter.

Øvingsoppgåve 9.6. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

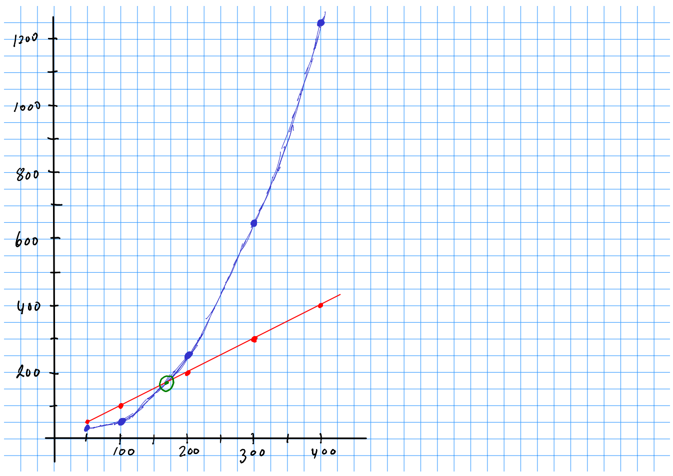
$$K(x) = -0{,}05x^2 + 80 \cdot x + 320,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. Bedrifta sel produktet for 80 kroner per eining. Kor mykje skal dei produsera og selja for å gå akkurat i balanse?

Eksempeloppgåve 9.7. Plott inntekts- og kostnadsfunksjonane frå oppgåve 9.5. Finn punktet der drifta går i balanse og samanlikn med løysinga som du fann i oppgåve 9.5.

Løysing 9.4. Det enklaste og tryggaste er å tabulera funksjonsverdiane for nokre verdiar av x. Merk at me ikkje ser på $x < 50$, sidan kostnadsfunksjonen ikkje er gyldig for små verdiar av x.

x	$K(x)$	$I(x)$
50	25	50
100	50	100
200	250	200
300	650	300
400	1250	400



Me finn skjæringspunktet der kostnadene er lik inntekta, ved $x \approx 170$ som stemmer godt med rekninga vår tidlegare.

Øvingsoppgåve 9.8. Plott inntekts- og kostnadsfunksjonane frå oppgåve 9.6. Finn punktet der drifta går i balanse og samanlikn med løysinga som du fann i oppgåve 9.6.

Eksempeloppgåve 9.9. Finn profittfunksjonen $P(x)$ for bedrifra i oppgåve 9.5.

1. Plott $P(x)$.

2. Løys likninga $P(x) = 0$ og markér løysinga i plottet.
3. Samanlikn med løysingane på oppgåve 9.5 og 9.7. Se særleg på grafane. Kva ser du?

Løysing 9.5. Me har profittfunksjonen

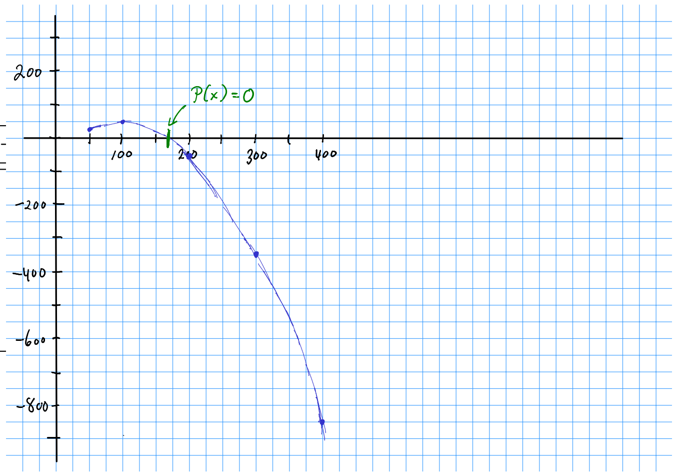
$$P(x) = I(x) - K(x) = x - \big(\frac{x^2}{100} - x + 50\big),$$

som me kan forenkla til

$$P(x) = -\frac{x^2}{100} + 2x - 50.$$

Her er det greitt å fylgja mynsteret frå oppgåve 9.7:

x	$K(x)$	$I(x)$	$P(x) = I(x) -$
50	25	50	25
100	50	100	50
200	250	200	-50
300	650	300	-350
400	1250	400	-850



Me skal løysa likninga

$$0 = P(x) = -\frac{x^2}{100} + 2x - 50.$$

Det er ofte meste behageleg å ha positiv fyrstegradskoeffisiet, so me gongar med -1 på båe sider og får

$$0 = \frac{x^2}{100} - 2x + 50,$$

som allereie har standardformen med $a = 1/100$, $b = -2$ og $c = 50$, og formelen gjev

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50}}{2 \cdot \frac{1}{100}}.$$

Me kan rekna ut dei ulike ledda og få

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{\frac{1}{50}},$$

eller

$$x = 100 \pm 50 \cdot \sqrt{2} \approx 100 \pm 70{,}71,$$

Dette gjev to nullpunkt, $x \approx 29{,}3$ og $x \approx 170{,}7$, men kostnadsfunksjonen føreset $x > 50$, so berre den siste løysinga er gyldig.

Ikkje berre finn me det same nullpunktet som i oppgåve 9.5, men me har løyst den eksakt same likninga på standardform. Nullpunktet (krysningspunktet med x-aksen) i plottet ligg på $x \approx 170$ som før.

Øvingsoppgåve 9.10. Finn profittfunksjonen $P(x)$ for bedrifra i oppgåve 9.6.

1. Plott $P(x)$
2. Løys likninga $P(x) = 0$ og markér løysinga i plottet.
3. Samanlikn med løysingane på oppgåve 9.6 og 9.8. Kva ser du?

Merknad 9.3. Løysingane på likninga $P(x)$ kallar me for ***nullpunkta*** åt funksjonen $P(x)$.

9.3 Balanse og overskot: ulikskapen

Eksempeloppgåve 9.11. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = \frac{x^2}{100} + 100 \cdot x - 500,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar, forutsett at $x \geq 10$. Bedrifta sel produktet for 200 kroner per eining. Kor mykje må dei produsera for å gå med overskot?

Løysing 9.6. Me må fyrst finna profittfunksjonen. Inntektsfunksjonen er $I(x) = 200x$, og profittfunksjonen vert då

$$P(x) = I(x) - K(x) = 200x - \left(\frac{1}{100} \cdot x^2 + 100 \cdot x - 500\right).$$

Når me løyser opp parentesane, får me

$$P(x) = 200x - \frac{1}{100} \cdot x^2 - 100 \cdot x + 500.$$

Dei to fyrstegradsledda ($200x$ og $-100x$) kan me slå saman, og skriva

$$P(x) = -\frac{1}{100} \cdot x^2 + 100 \cdot x + 500.$$

Me skal finna dei x-verdiane som gjev overskot, dvs. $P(x) > 0$. Dette er ein ulikskap.

Lat oss fyrst finna nullpunkta, $P(x) = 0$, der bedrifta går i balanse. Me bruker formelen med $a = -1/100$, $b = 100$ og $c = 500$.

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot \frac{-1}{100} \cdot 500}}{2 \cdot \frac{-1}{100}}$$

Dersom me gongar med -50 over og under streken, får me

$$x = 50 \cdot 100 \pm 50 \cdot \sqrt{100^2 - 4 \cdot \frac{-1}{100} \cdot 500}.$$

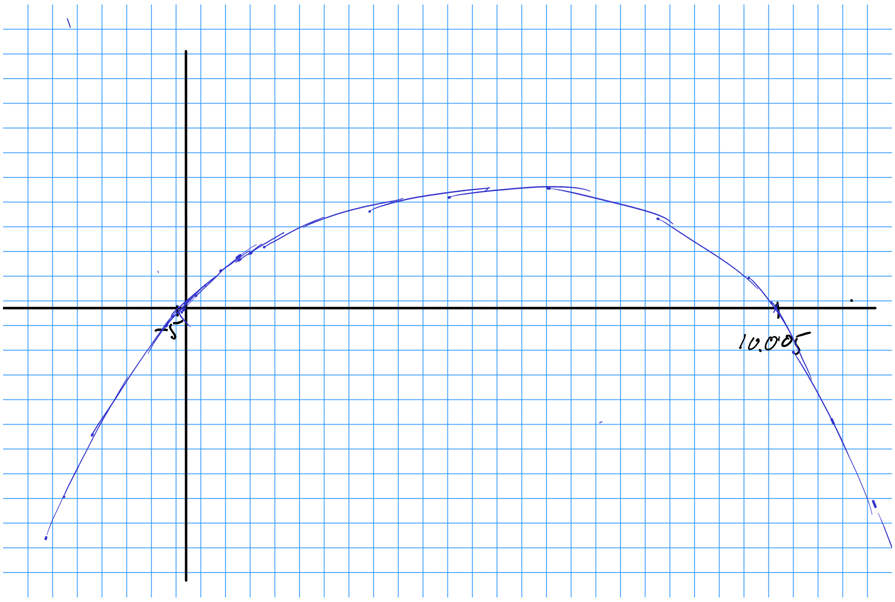
Med litt hjelp av kalkulator, får me

$$x = 5000 \pm 50 \cdot \sqrt{10000 + 20} = 5000 \pm 5005{,}0.$$

Lat oss no skissera funksjonen for å sjå kvar profitten er positiv.

Løysinga av andregradslikninga fortel oss at profittfunksjonen kryssar x-aksen to gongar, for $x = 10\,005{,}0$ og for $x = -5{,}0$. Me kan merka dei to punkta fyrst.

Det neste me skal merka oss er at når x vert svært stor ($x \to \infty$), so veks $x^2/100$ mykje raskare enn $100x$, og $x^2/100$ har negativt forteikn. Difor har me $P(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$. Det same skjer når $x \to -\infty$. Me har altso underskot både til venstre for $-5{,}0$ og til høgre for $10\,005{,}0$.



Sidan me veit korleis ein parabel ser ut, veit me at $P(x)$ byter forteikn i nullpunkta. Alternativt, om me er i tvil, kan me sjekka ein verdi mellom nullpunkta. Det plar vera lett å sjekka for $x = 0$; me får $P(x = 0) = 500$.

No skal me hugsa at kostnadsfunksjonen for bedrifta berre var definert for $x \geq 10$. Dermed fylgjer det at bedrifta går med overskot for $10 \leq x < 10\,005{,}0$.

Øvingsoppgåve 9.12. Lat oss tenkja oss ei bedrift med fylgjande kostnadsfunksjon:

$$K(x) = -\frac{x^2}{240} + 20 \cdot x + 200,$$

som gjev samla produksjonskostnad når dei produserer x einingar. Bedrifta sel produktet for 18 kroner per eining. Kor mykje må dei produsera for å gå med overskot?

9.4 Om å skyta med kanon†

Eksempeloppgåve 9.13. Ein kanon skyt ut kula i ein fart av 495 m/s i 45° vinkel over flat mark. Dette gjev ein fart på 350 m/s i høgderetninga (kula stig med 350 meter i sekundet). Kanonmunninga er to meter over bakken. Fysikarane har vist at høgda i meter over bakken etter t sekund kan skrivast som

$$h(t) = 2 + 350 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2.$$

Kor lang tid går der før kanonkula treff bakken?

Løysing 9.7. Her er det mykje fysikk og detaljar som me ikkje treng. Det einaste me treng er uttrykket $h(t)$ for avstanden mellom kula og bakken etter t sekund. Me skal finda tidspunktet t når kula treff bakken, dvs. når $h(t) = 0$. Mao. løyser me likninga

$$0 = 2 + 350 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2.$$

Me kan løysa med formelen, men for å vera sikker på at me bruker han rett, skal me reinskriva likninga slik at koeffisientane a, b og c kjem i rett orden

$$0 = -4{,}905 \cdot t^2 + 350 \cdot t + 2.$$

Då har me $a = -4{,}905$, $b = 350$ og $c = 2$ og set inn i formelen:

$$t = \frac{-350 \pm \sqrt{(-350)^2 - 4 \cdot (-4{,}905) \cdot 2}}{2 \cdot (-4{,}905}.$$

Når me gongar ut dei ulike ledda, får me

$$t = \frac{-350 \pm \sqrt{122\,539{,}24}}{-9{,}81} = \frac{-350 \pm 350{,}056}{-9{,}81}.$$

Her ser me to løysingar. Den negative løysinga $t = 0{,}056/(-9{,}81)$ er meiningslaus, sidan det er *før* skotet vart avfyrt. Berre den positive løysinga gjev meining:

$$t = \frac{-700{,}056}{-9{,}81} \approx 71{,}36.$$

Det tek altso 71,4 sekund før kanonkula treff bakken.

Øvingsoppgåve 9.14. Jonas står på toppen av Eiffeltårnet og kastar stein, 300 meter over bakken. Han kastar rett ut slik at utgangsfarten er 30 m/s nøyaktig horisontalt. Høgda $h(t)$ over bakken er gjeve som funksjonen

$$h(t) = 300 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2,$$

der t er tida frå kastet i sekund. Kor lang tid går før steinen treff bakken?

Eksempeloppgåve 9.15. Lat oss sjå igjen på kanonkula frå oppgåve 9.13. Kula vart skoten i 45° vinkel med utgangshastighet 495 m/s. Dette gjev ein fart på 350 m/s i høgderetninga og likeeins 350 m/s horisontalt. Sjå bort frå luftmotstand, slik at hastigheita langs bakken er konstant (inntil kula treff). Kanonmunninga er to meter over bakken. Kor langt frå kanonen treff kula bakken (i meter)?

Løysing 9.8. Me fann ut i oppgåve 9.13 at kula er i lufta i 71,4 sekund. Hastigheita langs bakken er 350 m/s gjennom heile flukta. Den vertikale hastigheita er uvesentleg for rørsla langs bakken. Gangar me tid med hastigheit får me avstand som fylgjer:

$$71{,}4\text{s} \cdot 350\text{m/s} = 71{,}4 \cdot 350\text{m} = 24\,990{,}0\text{m}.$$

Kula går altso 24 990 meter før ho landar.

Øvingsoppgåve 9.16. Jonas står på toppen av Eiffeltårnet og kastar stein, 300 meter over bakken. Han kastar rett ut slik at utgangsfarten er 30 m/s nøyaktig horisontalt. Høgda $h(t)$ over bakken er gjeve som funksjonen

$$h(t) = 300 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2,$$

der t er tida frå kastet i sekund. Kor langt går steinen før han landar, målt frå bakken rett under Jonas? (Bruk løysinga di frå oppgåve 9.14 som mellomrekning.)

9.5 Vidare lesing

Det kan vera nyttig å lesa fleire vinklingar på stoffet.

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 1.14 (kvadratiske likningar), kapittel 2.5 (kvadratisk funksjon) og 2.8 (kostnads- og inntektsfunksjon).

10 Veke 9. Grensekostnad

10.1 Stigningstal og grensekostnaden

For lineære kostnadsfunksjonar $K(x) = ax+b$ såg me at stigningstalet er ekstrakostnaden ved å auka produksjonen med éi eining. Dette kalla me for grensekostnaden, som er konstant uansett produksjonsvolum. Kvadratiske kostnadsfunksjonar har ikkje konstant stigningstal, men grensekostnaden er definert like fullt.

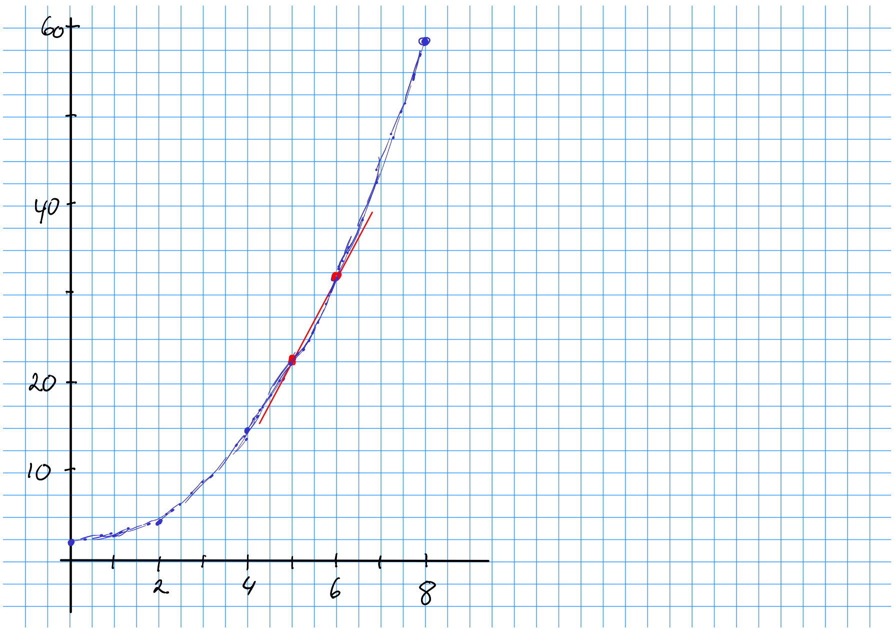
Eksempeloppgåve 10.1. Lat oss ta kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Me tenkjer oss at bedrifta sel (t.d.) mjøl i lausvekt. Når dei aukar produksjonen, so treng dei ikkje auka med ein heil kilo; dei kan auka med eit gram, eit milligram, eit mikrogram eller ein kvan lita storleik du kan tenkja deg.

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 8$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 6$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 6$. Kva er stigningstalet på denne lina?
4. Rekn ut kostnaden ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 6$.

Løysing 10.1. Me reknar ut $K(x)$ for $x = 0, 2, 4, 6, 8$ og markerer verdiane direkte i plottet, som under. Resten av plottet gjer me på frihand:



For å finna eksakt endringskostnad, må me setja inn tal og rekna, som fylgjer

$$K(5) = 5^2 - 5 + 2 = 22 \tag{62}$$

$$K(6) = 6^2 - 6 + 2 = 32 \tag{63}$$

$$\Delta K = K(6) - K(5) = 32 - 22 = 10. \tag{64}$$

Ekstrakostnaden når produksjonen aukar frå fem til seks einingar er ti.

Øvingsoppgåve 10.2. Lat oss ta kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

Varane vert selde i lausvekt slik at x kan ta vilkårlege verdiar, ikkje berre heiltalsverdiar.

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 8$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 6$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 6$. Kva er stigningstalet på denne lina?
4. Rekn ut kostnadauka ΔK når produksjonen aukar frå $x = 5$ til $x = 6$.

Merknad 10.1 (Delta)**.** Den greske bokstaven Δ (uttalt D på gresk) er hyppig brukt som symbol for endring i matematikken. Difor skriv me Δx for ei endring i x og ΔK for ei endring i $K(x)$.

Merknad 10.2 (Kontinuerleg og diskret funksjon)**.** I matematikken skil me gjerne mellom diskrete og kontinuerlege funksjonar. Ein *diskret* vare er ein vare som må teljast, t.d. klesplagg eller bilar. Ingen vil ha ein halv bil eller 0,1324 jakker. Andre varer vert målte *kontinuerleg*, t.d. øl (i liter) eller mjøl (i kilo).

Merknad 10.3. Mykje av matematikken som me lærer gjev berre meining for kontinuerlege funksjonar. Oppgåvene under gjev til dømes ikkje meining dersom bedrifta sel bilar. Når ein sel bilar er kostnadsfunksjonen $K(x)$ diskret, sidan x må vera eit heiltal.

Det er likevel vanleg å tenkja kontinuerleg når ein løyser modeller, for so å tolka løysinga til slutt, med tanke på den diskrete røynda. Dette må ein tenkja på når ein bruker matematikk på praktiske problem.

Merknad 10.4 (Diskret tid)**.** Renterekning er eit anna døme på diskrete funksjonar. Når rentene vert rekna ut periodevis, slik som er vanleg, vert tida i rentemodellen diskret. Tida vert tald i periodar, og ikkje målt i sekund.

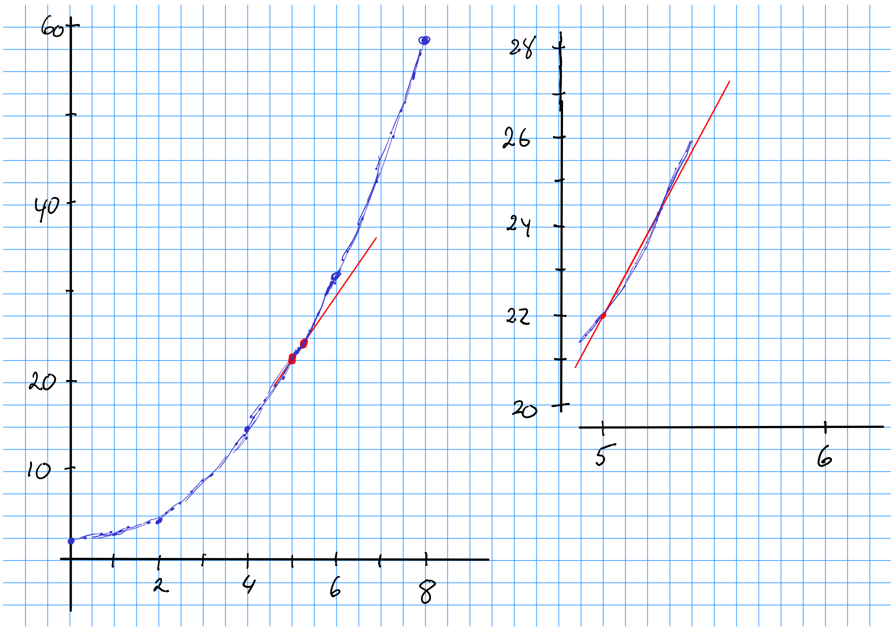
Kontinuerleg forrenting er ei matematisk oppfinning for å unngå utfordringane med diskret tid.

Eksempeloppgåve 10.3. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 10.1:

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 6$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 5{,}2$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 5{,}2$. Kva er stigningstalet på lina?
4. Rekn ut ekstrakostnaden ΔK ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 5{,}2$. Samanlikn med stigningstalet.

Løysing 10.2. Me teiknar plottet som me gjorde i forrige døme. Det er vanskeleg å sjå nøyaktig kva som skjer, so me teiknar ein versjon i større skala, der me berre tek med det interessante området. Då er det mogleg, so vidt, å sjå korleis lina krysser kurva to gongar.



I figuren kan me sjå at lina gjennom dei to punkta har stigningstal om lag 9,2.

For å finna kostnadsauka, må me fyrst finna kostnaden i dei to punkta me er interesserte i. Då får me:

(65) $$K(5) = 5^2 - 5 + 2 = 22$$

(66) $$K(5{,}2) = 5{,}2^2 - 5{,}2 + 2 = 23{,}84$$

(67) $$K(5{,}2) - K(5) = 23{,}84 - 22 = 1{,}84.$$

Det går an å sjå at stigningstalet er fem gongar kostnadsauka.

$$5 \cdot 1{,}84 = 9{,}2.$$

Det heng saman med at produksjonsauka, frå 5 til 5,2, er på ein femtedels eining, eller 0,2. Stigningstalet skal då vera

$$\frac{1{,}84}{0{,}2} = 9{,}2,$$

som me såg stemmer.

Øvingsoppgåve 10.4. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 10.2:

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

1. Plott $K(x)$ på intervallet $x = 0 \ldots 6$.
2. Marker kostnaden for $x = 5$ på kurva.
3. Marker kostnaden for $x = 5{,}2$ på kurva, og dra ei rett line gjennom kostnadene for $x = 5$ og $x = 5{,}2$. Kva er stigningstalet på lina?
4. Rekn ut kostnaden ved å auka produksjonen frå $x = 5$ til $x = 5{,}2$. Samanlikn med stigningstalet.

Merknad 10.5 (Sekant). Dei rette linene som me har teikna i oppgåvene over vert kalla *sekantar*. Dei skjærer kurva i to punkt.

Merknad 10.6. Det gjeld generelt at stigningstalet åt sekanten er lik kostnadsauka *per eining*, når produksjonen aukar frå det eine til det andre skjæringspunktet på kurva. Når sekanten kryssar for produksjonsvoluma x_1 og x_2, finn me altso stigningstalet som

$$a = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Eksempeloppgåve 10.5. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 10.1 og 10.3:

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Me skal studera kostnaden ved ørsmå produksjonsauker.

Ta utgangspunkt i produksjonsnivået $x = 5$, og sjå på ulike produksjonsendringar Δx. Rekn ut kostnaden før $(K(x))$ og etter $(K(x + \Delta x))$, samt endringa $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$ og den relative kostnadsauka per eining $\Delta K/\Delta x$.

Løysing 10.3. Det er enklast å setja dette opp i ein tabell. Me hugsar frå tidlegare oppgåver at $K(5) = 22$.

$\Delta x = x_{\text{ny}} - 5$	x_{ny}	$K(x_{\text{ny}})$	$\Delta K = K(x_{\text{ny}}) - K(5)$	$\frac{\Delta K}{\Delta x}$
1	6	32	10	10
0,2	5,2	23,84	1,84	9,2
0,05	5,05	22,4525	0,4525	9,05
0,01	5,01	22,0901	0,0901	9,01
0,001	5,001	22,009 001	0,009 001	9,001
0,0001	5,0001	22,000 900 01	0,000 900 01	9,0001

Me ser at når $\Delta x \to 0$,[1] vil $\Delta K/\Delta x \to 9$.

Øvingsoppgåve 10.6. Me skal sjå vidare på kostnadsfunksjonen frå oppgåve 10.2 og 10.4:

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1.$$

Me skal studera kostnaden ved ørsmå produksjonsauker.

Ta utgangspunkt i produksjonsnivået $x = 5$, og sjå på ulike produksjonsendringar Δx. Rekn ut kostnaden før ($K(x)$) og etter ($K(x + \Delta x)$), samt endringa $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$ og den relative kostnadsauka per eining $\Delta K/\Delta x$.

Merknad 10.7 (Tangent)**.** I oppgåva over har me studert ein sekant som skjærer kostnadskurva for eit punkt x og eit anna punkt $x + \Delta x$, for ei lita endring Δx. Når $\Delta x \to 0$ nærmer sekanten seg ein *tangent*, som rører ved kurva i eitt punkt.

Merknad 10.8. Stigningstalet åt sekanten er

$$a = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Dersom me let $\Delta x \to 0$, vil a nærma seg stigningstalet åt tangenten.

Merk at me ikkje kan setja $\Delta x = 0$, fordi me då deler på null. Likevel kan ein studera kva som skjer når $\Delta x \to 0$.

Merknad 10.9. Når me har ein funksjon og ein tangent som rører ved funksjonen for ein bestemt verdi av x, so seier me at stigningstalet åt tangenten er *den deriverte av funksjonen i punktet* x.

10.2 Den deriverte som ein funksjon

I forrige avsnitt vart me kjende med *den deriverte*, stigningstalet på ei kurve som ikkje treng vera rak, i eit bestemt punkt. På ei krum kurve varierer stigningstal langs kurva. Når $f(x)$ er ein funksjon, skriv me gjerne $f'(x)$ for stigningstalet. Sidan stigningstalet varierer med x, er òg $f'(x)$ ein funksjon.

Merknad 10.10. Den deriverte $f'(x)$ kan me tenkja på som stigningstalet åt $f(x)$, eller, for å vera pirkut, som stigningstalet åt ein tangent til kurva åt $f(x)$ i punktet x.

Dersom $f(x)$ er ein kostnadsfunksjon, kallar me $f'(x)$ for *grensekostnaden*.

Eksempeloppgåve 10.7. Lat oss sjå vidare på grensekostnaden for bedrifta i forrige avsnitt. Kostnadsfunksjonen var

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

[1] Pilen $\to$ vert lese som «går mot» eller «nærmar seg».

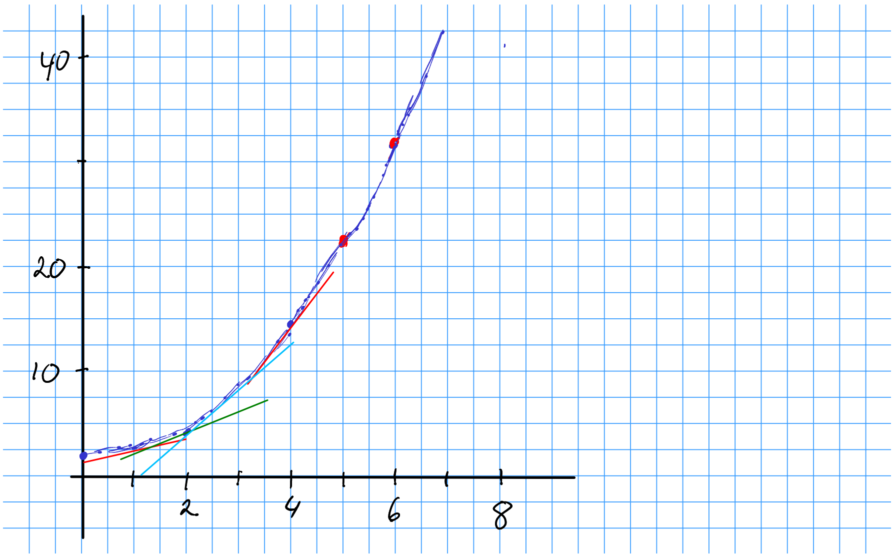
Rekneregel 10.1 Rekneregel: Derivasjon av kvadratisk funksjon.

Lat $f(x) = ax^2+bx+c$ vera ein kvadratisk funksjon. Då er den deriverte gjeven som

$$f'(x) = a \cdot 2 \cdot x + b$$

Me skriv $K'(x)$ for stigningstalet (grensekostnaden) åt $K(x)$.

Bruk plottet som du har av $K(x)$, og estimer stigningstalet $K'(x)$ på augemål, for $x = 1, 2, 3, 4$.



Løysing 10.4.

Tangenten for $x = 1$ (raud til venstre) ser ut til å stiga ei halv rute, eller 1,25, x går frå 0 til 1. Det gjev eit stiningstal på litt meir enn 1.

Tangenten for $x = 2$ (grøn) stig cirka ei rute (2,5) når x går frå 2 til 3. Det gjev eit stigningstal på 2,5.

Tangenten for $x = 3$ (cyan) stig nesten to ruter (5) når x går frå 3 til 4. Det gjev eit stigningstal på mellom 4 og 5.

Tangenten for $x = 4$ (raud til høgre) ser ut til å stiga knapt tre ruter, eller 7,5, x går frå 3,5 til 4,5. Det gjev eit stiningstal på vel 7.

Øvingsoppgåve 10.8. Sjå på plottet som du har av kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

frå forrige avsnitt. Estimer stigningstalet $K'(x)$ på augemål, for $x = 1, 2, 3, 4$.

Eksempeloppgåve 10.9. Me har

$$K(x) = x^2 - x + 2.$$

Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$ ved hjelp av formelen i rekneregel 10.1. Rekn ut $K'(x)$ for $x = 1, 2, 3, 4$ og samanlink med estimata dine frå oppgåve 10.7.

Løysing 10.5. Formelen gjev

$$K'(x) = 2x - 1.$$

Når me set inn, får me

$$K'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \tag{68}$$

$$K'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \tag{69}$$

$$K'(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5, \tag{70}$$

$$K'(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7. \tag{71}$$

Estimata våre i oppgåve 10.7 ligg stort sett nær dei sanne verdiane som me no har rekna ut. Den største bommen hadde me for $x = 2$, men me ser òg at kurva var ujamnt teikna rundt dette punktet, so det er ikkje rart at tangenten òg vart litt feil.

Øvingsoppgåve 10.10. Me har

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$ ved hjelp av formelen i rekneregel 10.1. Rekn ut $K'(x)$ for $x = 1, 2, 3, 4$ og samanlink med estimata dine frå oppgåve 10.8.

Eksempeloppgåve 10.11. Tenk deg at bedrifta, som har kostnadsfuknsjonen

$$K(x) = x^2 - x + 2,$$

produserte $x = 4$ einingar i fjor. Kva må prisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen i år? (Bruk svara dine frå oppgåve 10.9 som mellomrekning.)

Løysing 10.6. Grensekostnaden gjev kostnadsauka for ei lita (marginal) auke i produksjonen. For å tena pengar, må prisen dekkja denne kostnaden. Me fann $K'(4) = 7$, og me treng difor ein pris større enn sju.

Øvingsoppgåve 10.12. Tenk deg at bedrifta, som har kostnadsfuknsjonen

$$K(x) = -\frac{x^2}{10} + 4x + 1$$

produserte $x = 4$ einingar i fjor. Kva må prisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen i år? (Bruk svara dine frå oppgåve 10.10 som mellomrekning.)

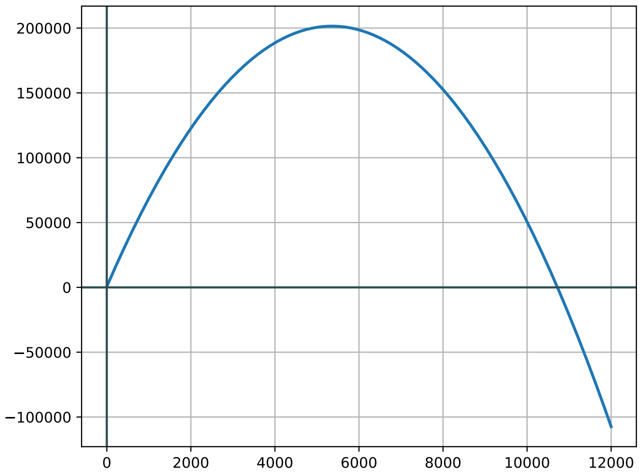
10.3 Topp- og botnpunkt

Eksempeloppgåve 10.13. Ålesund Dings og Profitt AS har rekna ut at dei har profittfunksjonen

$$P(x) = -0{,}007x^2 + 75x + 600,$$

for x produserte og solgte dingsar. Bedrifta ynskjer å maksimera profitten. Kor mange dingsar bør dei produsera og selja?

Løysing 10.7. Lat oss teikna ei skisse i full fart, for å sjå kva me arbeider med. Her har me teikna på maskin, som ei avveksling.



Lat oss tenkja over kva som skjer med den deriverte når produksjonen x aukar. Profittkurva går fyrst oppover, dvs. positivt stigningstal, og $P'(x) > 0$. Kurva flatar ut, som vil seia at stigningstalet vert mindre. På toppen går den deriverte frå å vera positiv, til å verta negativ. Mot høgre vert kurva brattare og brattare nedover, som vil seia at den deriverte vert svært negativ.

Akkurat på toppen, når den deriverte går frå positiv til negativ, er der eitt punkt der den deriverte er null. Det er toppunktet, beste moglege profitt, og det skal me finna. Me skal altso løysa likninga $P'(x) = 0$.

Lat oss fyrst derivera

$$P'(x) = -2 \cdot 0{,}007x + 75 = -0{,}014x + 75.$$

Veksta skulle vera null, so me får likninga

$$0 = -0{,}014x + 75.$$

Når me løyser, får me

$$x = \frac{75}{0{,}014} = 5357{,}14.$$

Det er ok å skriva at svaret er 5357,14.

Er me litt grundigare, hugsar me at dingsar ikkje kan delast opp. Svaret skulle difor vera anten 5357 eller 5358. Lat oss sjekka kva som er best

$$P(5357) = -0{,}007 \cdot 5357^2 + 75 \cdot 5357 + 600 = 201\,492{,}86, \tag{72}$$
$$P(5358) = -0{,}007 \cdot 5358^2 + 75 \cdot 5358 + 600 = 201\,492{,}85. \tag{73}$$

Det optimale er altso å produsera 5357 dingsar.

Øvingsoppgåve 10.14. Ørsta Fisk og Profitt AS har rekna ut at dei har profittfunksjonen

$$P(x) = -0{,}02x^2 + 100x + 120,$$

for x produserte og solgte dingsar. Bedrifta ynskjer å maksimera profitten. Kor mange dingsar bør dei produsera og selja?

Øvingsoppgåve 10.15. Ta funksjonen

$$f(x) = x^2 + 2x + 5.$$

Finn minimumspunktet, dvs. den x-verdien som gjev minst verdi for $f(x)$.

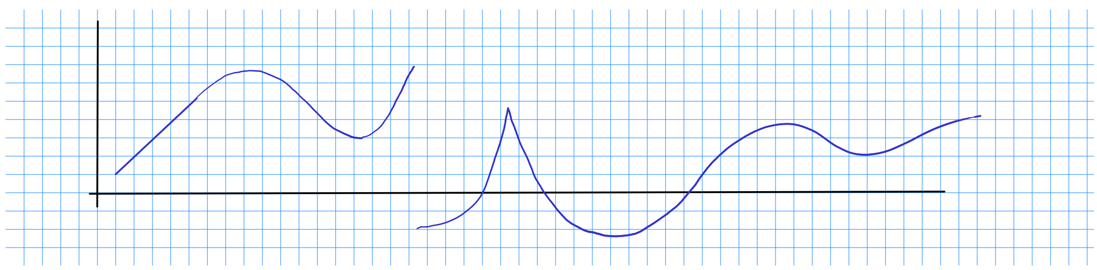
Øvingsoppgåve 10.16. Ta funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2x - 12.$$

1. Har $f(x)$ eit topp- eller botnpunkt?
2. Finn optimum (topp- eller botnpunkt).

10.4 Derivasjon

Eksempeloppgåve 10.17. Ein funksjon $f(x)$ definerer fylgjande kurve:

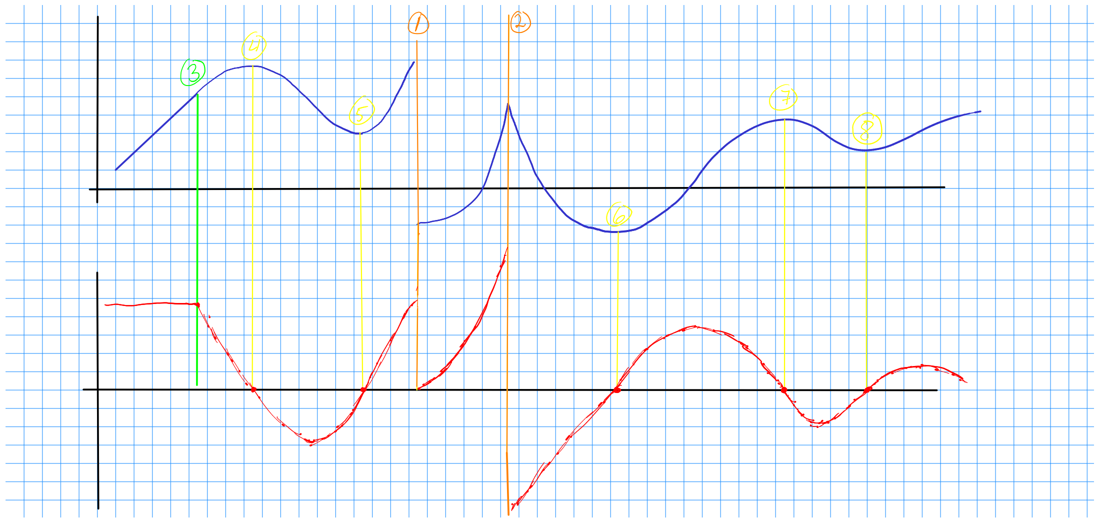


Skissér kurva for den deriverte, $f'(x)$.

Løysing 10.8. Me merker oss fleire distinkte punkt på kurva, og dei bør me merka av fyrst.

1. Kurva er diskontinerleg (1).
2. Kurva har eit knekkpunkt (2).
3. Kurva har eit slags knekkpunkt (3), der ho fyrst er lineær og so flater ut.
4. Fem topp- og botnpunkt (4-8).

I alle topp- og botnpunkta er den deriverte null, so dette kan me merka av fyrst. Me bruker raudt for den deriverte og blått for den opprinnelege funksjonen.



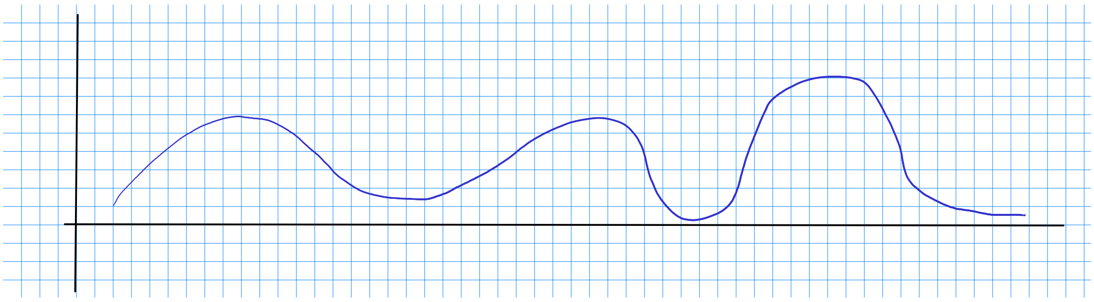
Der kurva er lineær, er stigningstalet og dermed den deriverte, konstant. Me kan altso teikna ei flat line til venstre for den grøne lina (3). Kurva stig, so den deriverte er positiv.

Til venstre for den grøne lina vert stigninga mindre ned mot null ved den gule lina (4) og vert negativ. Han snur og kryssar x-aksen ved den gule lina (5), og endar positiv ved diskontinuiteten (1).

Mellom dei oransje linene, startar den deriverte cirka på null, og stigningtalet stig. Ved knekkpunktet (2) går kurva brått frå å stiga til å falla, so den deriverte vert diskontinuerleg og held fram under x-aksen.

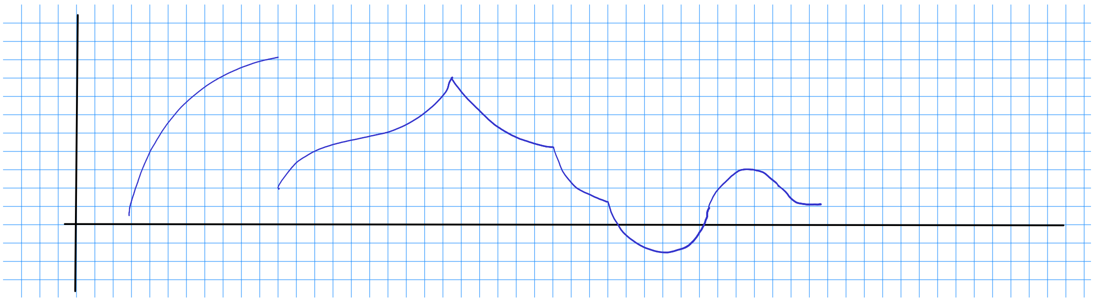
Det siste stykket er relativt enkelt å teikna. me må treffa nullpunkta som svarer til topp- og botnpunkt, og me freistar å teikna ein stor verdi for den deriverte når kurva er bratt, men det går best på augemål.

Øvingsoppgåve 10.18. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:



Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 10.19. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:



Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 10.20. Ein funksjon $g(x)$ definerer fylgjande kurve:

Skissér kurva for den deriverte, $g'(x)$.

Øvingsoppgåve 10.21. Sjå på funksjonen

$$h(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3.$$

Plott funksjonen, for hand eller på maskin. Skisser deretter den deriverte, $h'(x)$, basert på kva du ser i plottet av $h(x)$.

Øvingsoppgåve 10.22. Sjå på funksjonen

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

Plott funksjonen, for hand eller på maskin. Skisser deretter den deriverte, $f'(x)$, basert på kva du ser i plottet av $f(x)$.

10.5 Om fiskeforvalting†

Eksempeloppgåve 10.23. I fiskeforvaltinga søkjer ein å regulera fisket slik at utbytet vert størst mogleg over tid. Matematiske modellar vert brukt for å forklara samanhengen mellom mengd og tilvekst av fisk i havet. Ein slik modell (frå Neher [1990]) er

$$g(b) = 0{,}005 \cdot b \cdot (100 - b),$$

som gjev tilveksten $g(b)$ (g for *growth*) for ein gjeven bestand b.

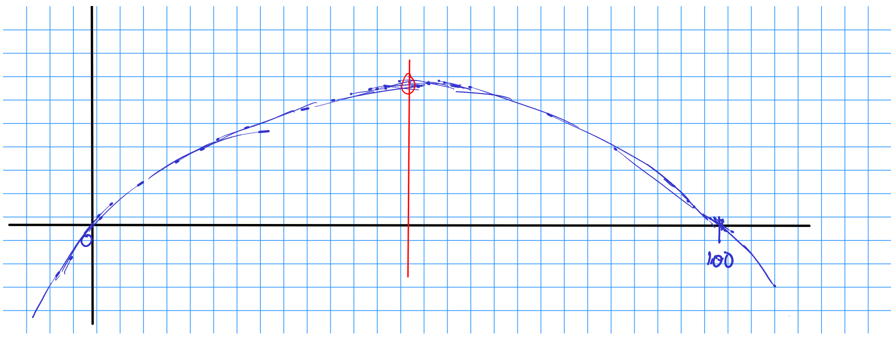
Dersom fiskeuttaket er lik tilveksten, vert bestanden stabil. Finn den bestanden b som gjev høgast tilvekst.

Løysing 10.9. Lat oss byrja med å teikna ei skisse over funksjonen

$$g(b) = 0{,}005 \cdot b \cdot (100 - b).$$

Når ein av faktorane på høgre side er null, må produktet vera null. Dermed har funksjonen nullpunkt for $b = 0$ og for $100 - b = 0$ (dvs. for $b = 100$). Desse nullpunkta markerer me i skissa.

Vidare kan me sjå at når me gongar ut parentesen $(100 - b)$, får me eit andregradsledd (b^2) med negativt forteikn. Kurva skal difor ha botnen opp.



Me skal finna toppunktet som er markert i figuren, dvs. punktet der den deriverte $g'(x) = 0$. Dersom me gangar ut parentesen er det lettera å finna den deriverte:

(74) $$g(b) = 0{,}5 \cdot b - 0{,}005 \cdot b^2.$$

(75) $$g'(b) = 0{,}5 - 0{,}01 \cdot b.$$

Det gjev ei likning

$$0 = 0{,}5 - 0{,}01 \cdot b, \tag{76}$$

$$b = \frac{0{,}5}{0{,}01} = 50. \tag{77}$$

Høgast tilvekst får me altso ved ein bestand på 50.

Merknad 10.11. Merk at fordi andregradsfunksjonen er symmetrisk, so må toppunktet 50 liggja midt mellom nullpunkta 0 og 100. Det er kjekt å sjå at dette stemmer me rekninga over.

Me har brukt den omstendelege løysinga med den deriverte for å øva oss til me får andre funksjonar som ikkje er symmetriske.

Øvingsoppgåve 10.24. Sjå på fylgjande vekstmodell,

$$g(b) = 0{,}002 \cdot b \cdot (150 - b) - 50,$$

der $g(b)$ er tilveksten for ein gjeven bestand b. Finn den bestanden b som gjev høgast tilvekst.

10.6 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel (3.1), 3.2–3.4. Merk at presentasjonen av grenseverdiar (kapittel 3.1) er unødvendig abstrakt og vil falla tung for mange. Grenseverdinotasjonen vert brukt vidare i kapittel 3.2-3.4. Ein kjem langt med ei konseptuell forståing av derivasjon, men nokon vil ha nytte av den abstrakte og formelle forståinga i tillegg.

10.6.1 Foilar og animasjonar

1. `http://kerckhoffs.schaathun.net/matematikk1/talks/limits/bouncingball/`
2. `http://kerckhoffs.schaathun.net/matematikk1/talks/derivation/intro/`
3. `http://kerckhoffs.schaathun.net/matematikk1/talks/derivation/tangent/`

11 Veke 10. Modellering

Denne veka er litt hummer og kanari. Det er stoff som logisk sett skulle ha vore fordelt på dei tre siste vekene, men som me ikkje rakk over.

11.1 Derivasjonsreglane

Bruk formlane frå formelarket.

Oppgåvene i dette kapittelet opnar ikkje for tolking og det er difor mogleg å gje ein fasit.

Øvingsoppgåve 11.1. Finn den deriverte når

1. $f(x) = 3x + 1$
2. $f(x) = 5x - 4$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$
5. $f(x) = 10x^2 - 3x$

Løysing 11.1.

1. $f'(x) = 3$
2. $f'(x) = 5$
3. $f'(x) = 2x$
4. $f'(x) = 4x + 2$
5. $f'(x) = 20x - 3$

Øvingsoppgåve 11.2. Finn $f'(x)$ når

1. $f(x) = x^2 - x - 1$
2. $f(x) = 5x^2 + 2x - 12$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 5$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$
5. $f(x) = x^3 - x^2$
6. $f(x) = -x^3 + 2x^2$

Løysing 11.2.

1. $f'(x) = 2x - 1$
2. $f'(x) = 10x + 2$
3. $f'(x) = -x + 1$
4. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

5. $f'(x) = 3x^2 - 2x$

6. $f'(x) = -3x^2 + 4x$

Øvingsoppgåve 11.3. Derivér funksjonane

1. $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot x^3$

2. $f(x) = (x^3 + x + 1) \cdot (x^4 - 1)$

Løysing 11.3.

1. $f'(x) = (2x + 2) \cdot x^3 + 3 \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot x^2 = 2x^4 + 2x^3 + 3x^4 + 6x^3 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 8x + 3)$

2. $f'(x) = (3x^2+1)\cdot(x^4-1)+(x^3+x+1)\cdot 4\cdot x^3 = 3x^6+x^4-3x^2-1+4x^6+4x^4+4x^3 = 7x^6 + 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 1$

Øvingsoppgåve 11.4. Finn dei deriverte når

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

2. $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2}$

3. $f(x) = 5 + x^2 + \frac{x^2+1}{x}$

4. $f(x) = x^3 + \frac{3x^2+2x+1}{x^2}$

5. $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}$

Løysing 11.4.

1. $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

2. $f'(x) = \frac{2x^2(3x^2-2)-4x(x^3-2x+1)}{4x^4} = \frac{x^3+2x-2}{2x^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

3. $f'(x) = 2x + \frac{x^2-1}{x^2}$

4. $f'(x) = 3x^2 + \frac{-2x-2}{x^3}$

5. $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2} = 2x + 1$ (Merk, den siste forenklinga er ikkje mogleg å sjå med dei teknikkane som me har lært. I og med at oppgåva ikkje bed om forenkling, er det ok å gje den fyrste formen.)

Øvingsoppgåve 11.5. Dersom du har tid, kan du

1. gjera tilsvarande oppgåver i læreboka: oppgåve 3.14, 3.15 a-f og 3.16a, samt oppåve 3.17 a b d.

2. bla tilbake og gjera oppgåver som du har hoppa over tidlegare.

Du avgjer sjølv kva som er nyttigast for deg.

11.2 Prisfunksjon

Eksempeloppgåve 11.6. Me skal atter gå attende til bryggeriet frå oppgåve 8.18, der me fann profittfunksjonen

$$P(x) = 22 \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Lat oss no tenkja oss at prisen kan variera. Lat oss skriva p for prisen i staden for 7, dvs.

$$P(x) = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Gjeve at bryggeriet går eksakt i balanse, skriv prisen p som dei må krevja for ølet som ein funksjon av volumet x.

Løysing 11.5. Me skal fram til eit uttrykk for p. Føresetnaden om at bryggeriet går eksakt i balanse svarer til likninga $P(x) = 0$, eller mao.

$$0 = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Denne likninga kan me løysa for p, på vanleg måte, sjølv om x vert ståande att som ein ukjend. Me må flytta over det eine leddet med p, og få

$$p \cdot x = 10\,000 + 7 \cdot x.$$

No kan me dela med x på båe sider,

$$p = \frac{10\,000}{x} + \frac{7 \cdot x}{x} = 7 + \frac{10\,000}{x}.$$

Me ser no korleis p avheng av x. For å understreka at dette, kan me skriva p med funksjonsnotasjon som $p(x)$. Prisfunksjonen er altso

$$p(x) = 7 + \frac{10\,000}{x},$$

når bryggeriet går i balanse.

Øvingsoppgåve 11.7. Lat oss gå tilbake til sandtaket på Mo i oppgåve 8.19. Kostnadsfunksjonen er $K(x) = 100\,000 + 300x$. Inntektsfunksjonen hadde me funne som $I(x) = 600 \cdot x$, men lat oss no tenkja at prisen p er variabel, og ikkje konstant lik 600. Då er inntektsfunksjonen $I(x) = p \cdot x$, og profittfunksjonen $P(x) = p \cdot x - 100\,000 - 300 \cdot x$. Kva pris må sandtaket krevja for å gå i balanse? Skriv prisen som ein funksjon $p(x)$ av produksjonsvolumet.

Eksempeloppgåve 11.8. I oppgåve 11.6 fann me ein prisfunksjon. I praksis er prisen normalt bestemt av marknaden, og bedrifta må tilpassa produksjonen til prisnivået. Profittfunksjonen er stadig

$$P(x) = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

Finn ein produksjonsfunksjon $x(p)$ som seier kor mykje bryggeriet kan produsera for eit gjeve prisnivå p, medan drifta går i balanse.

Løysing 11.6. Utgangspunktet, om balanse i drifta, gjev likninga

$$0 = p \cdot x - 10\,000 - 7 \cdot x.$$

I oppgåve 11.6 løyste me for p. No skal me ha eit uttrykk for x, og då må me løysa for x.

Lat oss dra saman alle ledd med x:

$$0 = (p - 7) \cdot x - 10\,000,$$

og flytta over konstandleddet:

$$10\,000 = (p - 7) \cdot x.$$

Når me no deler på $p - 7$, får me eit uttrykk for x:

$$\frac{10\,000}{p - 7} = x.$$

Produksjonsfunksjonen er altso

$$x(p) = \frac{10\,000}{p - 7}$$

når bryggeriet går i balanse.

Øvingsoppgåve 11.9. I oppgåve 11.7 fann me ein prisfunksjon. No ynskjer sandtaket å finna ut korleis dei skal tilpassa produksjonen til prisnivået som er sett av marknaden. Dei vil altso finna ein produksjonsfunksjon $x(p)$ som seier kor mykje sand dei skal produsera dersom dei kan selja han for ein pris p. Ta utgangspunkt i profittfunksjonen

$$P(x) = p \cdot x - 100\,000 - 300 \cdot x$$

og finn $x(p)$ slik at $P(x) = 0$.

Eksempeloppgåve 11.10. Ta pris- og produksjonsfunksjonane frå oppgåve 11.6 og 11.8:

$$p(x) = 7 + \frac{10\,000}{x}, \tag{78}$$

$$x(p) = \frac{10\,000}{p - 7}. \tag{79}$$

Plott båe funksjonane.

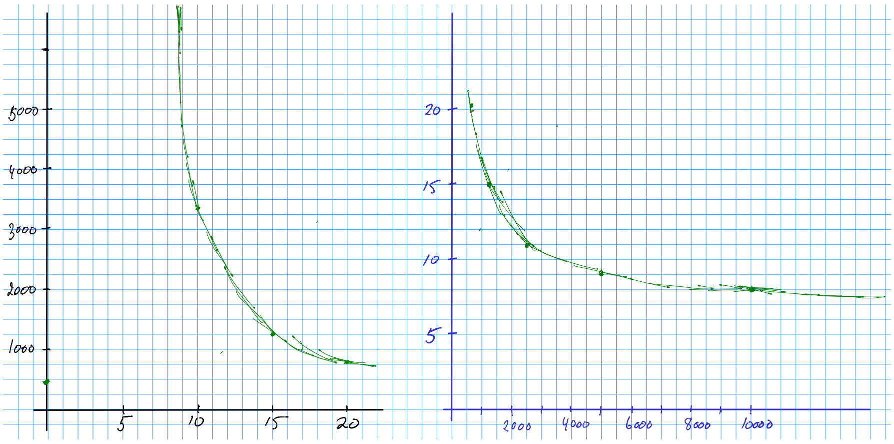
Løysing 11.7. Legg merke til at x og $x(p)$ er produksjonsvolum i liter, medan p og $p(x)$ er pris i liter. Vanlegvis vil me ha funksjonsverdiane $x(p)$ og $p(x)$ på y-aksen og argumenta p og x på x-aksen. Då kan me ikkje plotta funksjonane i same diagram.

Korkje $p(x)$ eller $x(p)$ er lineære funksjonar, fordi variabelen (hhv. x og p) står under brøkstreken. Då må me rekna ut litt meir enn to punkt for å teikna godt.

p	$x(p)$
0	$-1428{,}57$
2	$-2000{,}00$
5	$-5000{,}0$
6	$-10\,000{,}0$
8	$10\,000{,}0$
9	$5000{,}0$
10	$3333{,}33$
15	$1250{,}00$
20	$769{,}23$

x	$p(x)$
1	$10\,007{,}00$
750	$20{,}33$
1250	$15{,}00$
2500	$11{,}00$
5000	$9{,}00$
10000	$8{,}00$

Me kan plotta punkta og dra ei kurve gjennom dei på frihand.



Øvingsoppgåve 11.11. Ta pris- og produksjonsfunksjonane som du fann i oppgåve 11.7 og 11.9 og plott dei i eit rutenett.

Merknad 11.1. Me har funne to funksjonar $p(x)$ (oppgåve 11.6) og $x(p)$ (oppgåve 11.8). Dei to er *inverse funksjonar*. Den eine reknar frå pris til produksjonsvolum, og den andre reknar tilbake.

Merknad 11.2. Dei to funksjonane

$$p(x) = 22 - \frac{10\,000}{x}, \tag{80}$$

$$x(p) = \frac{10\,000}{22 - p}, \tag{81}$$

er døme på *rasjonale funksjonar*. Det ser fordi variabelen (hhv. x og p dukkar opp under brøkstreken).

Kravet til ein rasjonal funksjon er at han kan skrivast som ein brøk med polynom over og under streken. Dette ser me umiddelbart for $x(p)$, medan $p(x)$ kan skrivast om som ein brøk for å tydleggjera det:

$$p(x) = 22 - \frac{10\,000}{x} = \frac{22x - 10\,000}{x}.$$

11.3 To nullpunkt

Eksempeloppgåve 11.12. Me er bedne om å foreslå ein profittfunksjon for å modellera økonomien i ei viss bedrift. Me veit at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 10$ og $x = 20$, og me veit at profitten er positiv når $10 < x < 20$. Kva er den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava?

Løysing 11.8. Lat oss sjå på eit krav åt gongen. Den enklaste funksjonen som tilfredsstiller $f_1(10) = 0$, er ei rett line som kryssar x-aksen for $x = 10$, altso $f_1(x) = x - 10$. Tilsvarande for $x = 20$ finn me $f_2(x) = x - 20$.

Dersom me tek produktet av to funksjonar, t.d.

$$f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

so veit me at $f(x)$ er null når minst éin av faktorane er null. Dvs. at nullpunkta åt $f(x)$ er nullpunkta åt $f_1(x)$ og åt $f_2(x)$. Funksjonen

$$f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (x - 10) \cdot (x - 20) = x^2 - 30x + 200,$$

har altso riktige nullpunkt.

Funksjonen me er på jakt etter skal vera positiv på midten, men $f_3(x)$ har eit botnpunkt mellom $x = 20$ og $x = 30$. Dersom me snur $f_3(x)$ opp/ned, får me ein modell som passar. Me bruker

$$f(x) = -f_3(x) = -x^2 + 30x - 200.$$

Merknad 11.3. Dersom algebraen i oppgåva over er tung å forstå, so løner det seg å skissera funksjonen $f_3(x)$ og bruka skissa som hjelp til å vurdera forteikn.

Det var meininga å bruka skisse i løysinga, men det var utegløymt. Orsak.

Øvingsoppgåve 11.13. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 100$ og $x = 700$. Bedrifta tener penger når $100 < x < 700$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava.

Øvingsoppgåve 11.14. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 50$ og $x = 150$. Bedrifta taper penger når $x = 75$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava.

Øvingsoppgåve 11.15. Du skal modellera økonomien i ei viss bedrift. Du får vita at profitten er null for produksjonsnivåa $x = 125$ og $x = 175$. Bedrifta taper penger når $x = 75$. Finn den enklaste moglege profittfunksjonen som tilfredstiller desse krava?

11.4 Fleire nullpunkt†

Eksempeloppgåve 11.16. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3) = 0.$$

Løysing 11.9. For å finna ein funksjon med bestemte nullpunkt, kan me gonga saman funksjonar, éin for kvart nullpunkt. Dei fire nullpunkta svarer til lineære funksjonar

$$(x+3), (x+1), (x-1), (x-3).$$

Funksjonen

$$f(x) = (x+3) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$$

tilfredsstiller altso krava.

Øvingsoppgåve 11.17. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-1) = f(0) = f(2) = 0.$$

Øvingsoppgåve 11.18. Finn ein funksjon $f(x)$ slik at

$$f(-4) = f(-1) = f(0) = f(2) = f(4) = 0.$$

12 Veke 11. Funksjonsdrøfting

I dette kapittelet skal me drøfta og skissera funksjonar.

Merknad 12.1. Når me *skisserer ein funksjon* teiknar me ei grovskisse der me freistar å få dei karakteristiske punkt, som topp-, botn- og nullpunkt korrekte.

Å ***drøfta*** ein funksjon tyder å vurdera formen som funksjonen har, og fastsetja karakteristiske punkt som topp-, botn- og nullpunkt. Skissa vert ein visuell presentasjon av drøftinga.

12.1 Andregradsfunksjonar

Eksempeloppgåve 12.1. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 - x.$$

Løysing 12.1. Det er greitt å ha med skjæringspunkta med aksane. Me kan sjå (ved å trekkja ein x utanfor parentes) at

$$f(x) = x(x-1).$$

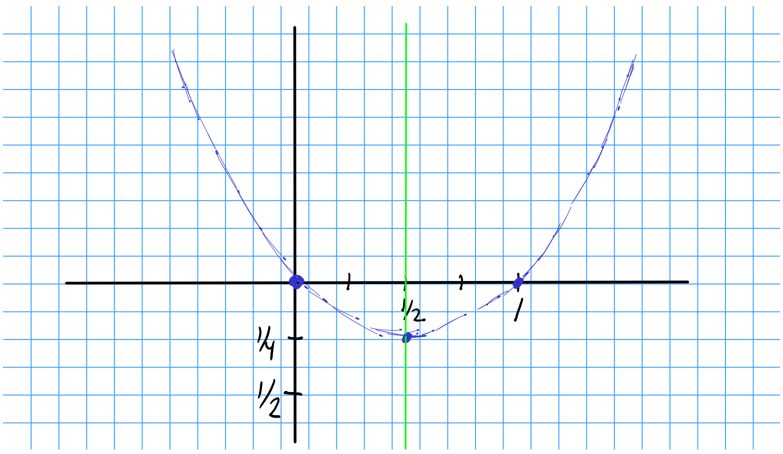
Dermed har me to nullpunkt, eitt for kvar faktor, når $x = 0$ og når $x - 1 = 0$.

Me veit at andregradsfunksjonen er symmetrisk, og symmetrilina går midt mellom nullpunkta, altso for $x = \frac{1}{2}$.

For å finna y-verdien i ekstremalpunktet, som ligg på symmetrilina, set me inn i funksjonen:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

Dette er nok informasjon til å fullføra skissa.



Øvingsoppgåve 12.2. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^2 + 1.$$

Eksempeloppgåve 12.3. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Løysing 12.2. Det er greitt å ha med skjæringspunkta med aksane. Nullpunkta finn me ved å løysa likninga $f(x) = 0$. Formelen for andregradslikningar gjev

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Legg merkje til -3 under rotteiknet. Kvadratrota er ikkje definert for negative tal, og difor har funksjonen ingen nullpunkt.

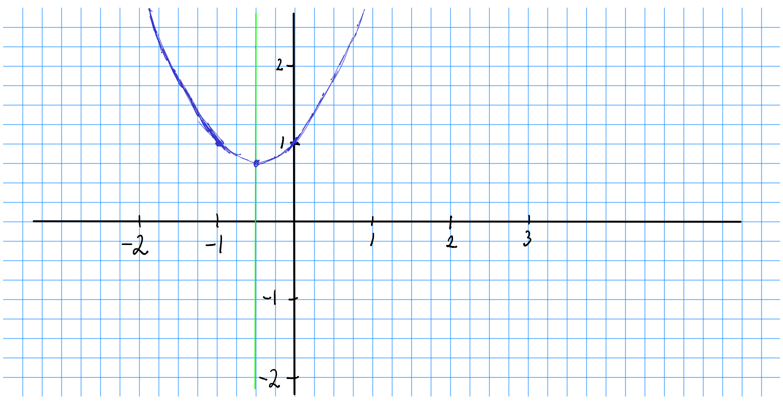
Me kan finna botnpunktet ved å derivera:

$$f'(x) = 2x + 1,$$

og $f'(x) = 0$ for $x = -\frac{1}{2}$. Funksjonen er altso symmetrisk om lina $x = -\frac{1}{2}$, og funksjonsverdien i botnpunktet er

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

Dette er eit godt utgangspunkt for å skissera.



Øvingsoppgåve 12.4. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^2 + x - 1.$$

Øvingsoppgåve 12.5. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Øvingsoppgåve 12.6. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

Merknad 12.2. Der er ein symmetri i formelen for å løysa andregradslikningar:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Der er to røter, éi for positivt og éi for negativ rottuttrykk. Røtene ligg symmetrisk om lina

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

Me kan alltid finna symmetrilina på denne måten, og me ser at det ville ha gjeve same svar i løysinga på oppgåve 12.3.

12.2 Tredjegradsfunksjonar

Eksempeloppgåve 12.7. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Løysing 12.3. Éin god start er å finna topp- og botnpunkt. Den deriverte er

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Topp- og botnpunkta finn me ved å løysa

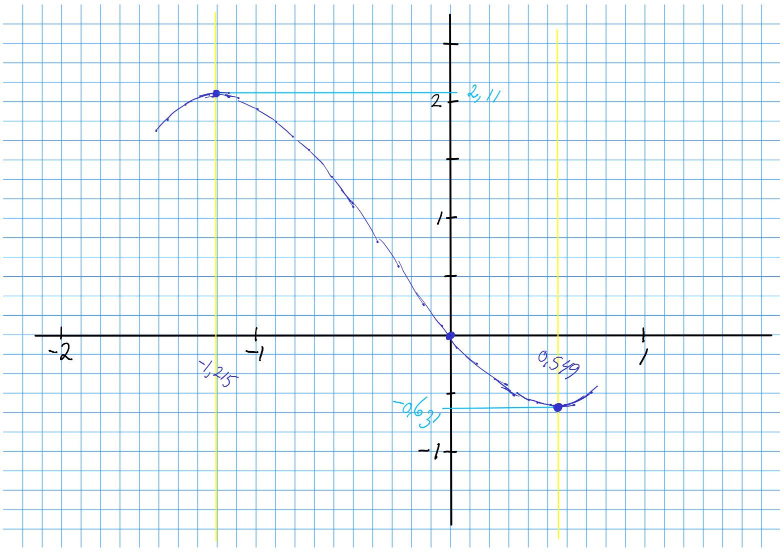
$$0 = 3x^2 + 2x - 2,$$

og formelen gjev

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{6} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{28}}{6}.$$

Dette gjev $x = 0{,}549$ og $x = -1{,}215$. Vidare ser me at $f'(x)$ er stor (positiv) for store og små verdiar av x. Dvs. at $f(x)$ aukar fram til $-1{,}215$, fell vidare til $0{,}549$, og til slutt stig igjen.

Det er òg lett å sjå at $f(0) = 0$, so kurva må gå gjennom origo. Det ser slik ut.



Merk at me ikkje har funne dei to andre nullpunkta nøyaktig. Difor er det berre nullpunktet i origo som me har markert tydleg med ein prikk.

Øvingsoppgåve 12.8. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Øvingsoppgåve 12.9. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta.

Eksempeloppgåve 12.10. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 12.4. Me byggjer vidare på skissa frå oppgåve 12.10, der me fann topp- og botnpunkt. No treng me skjæringspunkt med aksane.

Skjæringspunktet med y-aksen er enkelt å finna, som funksjonsverdien ved $x = 0$. Me skriv

$$f(0) = 0^3 + 0^2 - 2 \cdot 0 = 0.$$

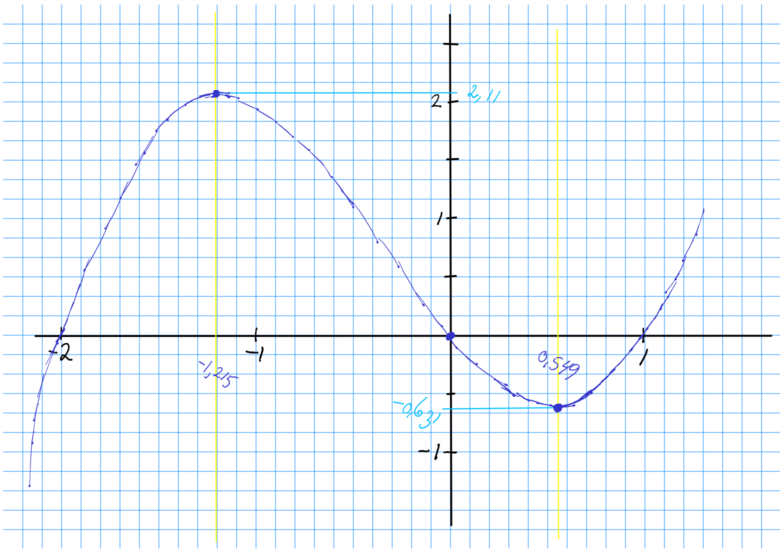
Det er generelt vanskeleg å finna nullpunkta for ein tredjegradsfunksjon, men i dette tilfellet er det enkelt. Der er ikkje noko konstantledd, og dermed kan me dra x utanfor ein parentes:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2).$$

Når $f(x) = 0$ har med altso anten $x = 0$, eller

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Andregradslikninga kan me løysa med formel, og me får $x = -2$ eller $x = 1$. Totalt har me tre nullpunkt $x = -2, 0, 1$. Me utvider skissa frå oppgåve 12.10 med ny informasjon.



Øvingsoppgåve 12.11. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Eksempeloppgåve 12.12. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 18x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 12.5. Denne funksjonen har òg x i alle ledda, slik at me kan faktorisera enkelt:

$$f(x) = x \cdot (x^2 - 8x + 18).$$

Me har altso eit nullpunkt i $x = 0$. Dersom me set parentesen lik null,

$$0 = x^2 - 8x + 18,$$

og løyser med formel, får me eit negativt tal under rotteiknet, so dette andregradsuttrykket har ikkje noko nullpunkt. Det einaste skjæringspunktet mellom $f(x)$ og aksane er i origo.

Den deriverte er

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 18.$$

Nullpunkta (for den deriverte) er gjeve ved formelen som

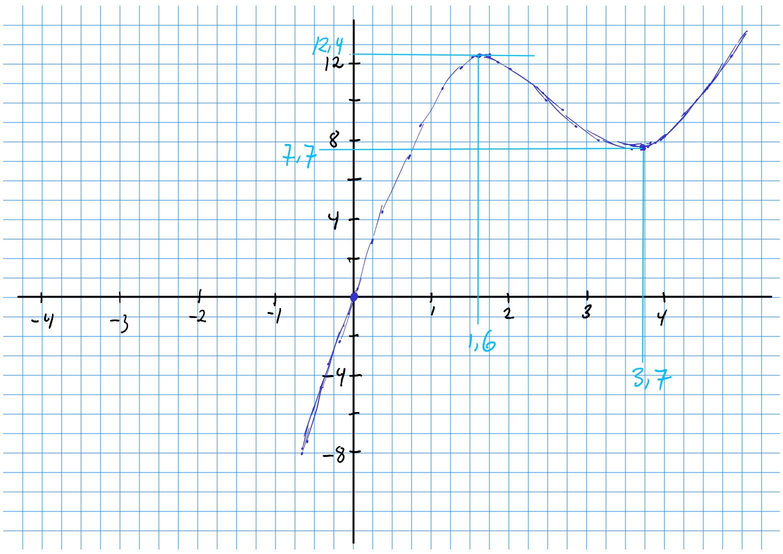
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{10}}{3} = \begin{cases} 1{,}613 \\ 3{,}721 \end{cases}$$

Tilsvarande y-verdiar er

$$f(1{,}613) = 12{,}42, \tag{82}$$

$$f(3{,}721) = 7{,}73. \tag{83}$$

Me markerer topp- og botnpunkt, samt nullpunktet i origo og teiknar på frihand.



Øvingsoppgåve 12.13. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 32x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Øvingsoppgåve 12.14. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Eksempeloppgåve 12.15. Drøft og skissér funksjonen

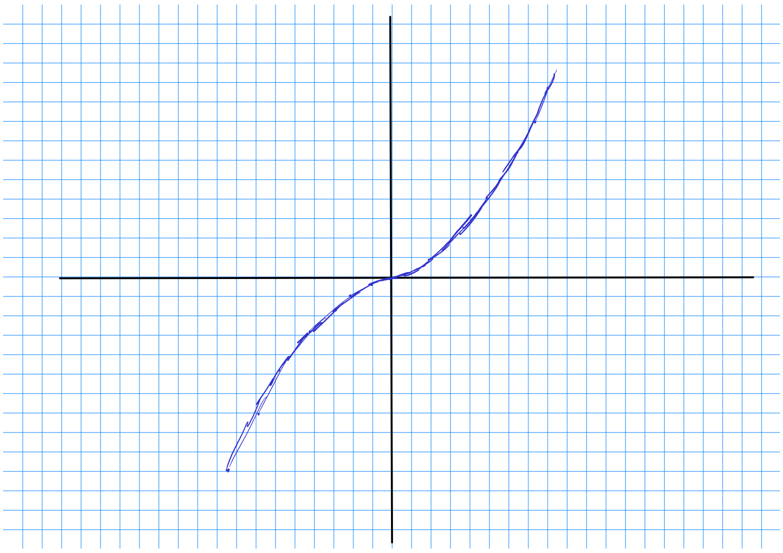
$$f(x) = x^3.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 12.6. Dette er ein enkel funksjon. Det er lett å sjå at funksjonen er monotont stigande og går gjennom origo. Me får likevel meir informasjon ved å sjå på den deriverte

$$f'(x) = 3x^2.$$

Den deriverte er 0 akkurat i origo. Kurva åt $f(x)$ er altso fyrst bratt stigande, flatar ut inn mot origo, men tek so til å stiga igjen, brattare og brattare. Plottet ser slik ut:



Øvingsoppgåve 12.16. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 + x.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Øvingsoppgåve 12.17. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 1.$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

12.3 Polynom på faktorisert form†

Eksempeloppgåve 12.18. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2.$$

Det er mogleg å visa at funksjonsuttrykket kan faktoriserast, slik at

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x - 2)$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

Løysing 12.7. Me kan finna nullpunkta ved hjelp av den faktoriserte formen. Me har $f(x) = 0$ når

$$0 = x^2 + x + 1, \quad \text{eller} \tag{84}$$

$$0 = x - 2. \tag{85}$$

Når me set inn i formelen, finn me at den fyrste likninga ikkje har løysingar. Den andre har løysinga $x = 2$.

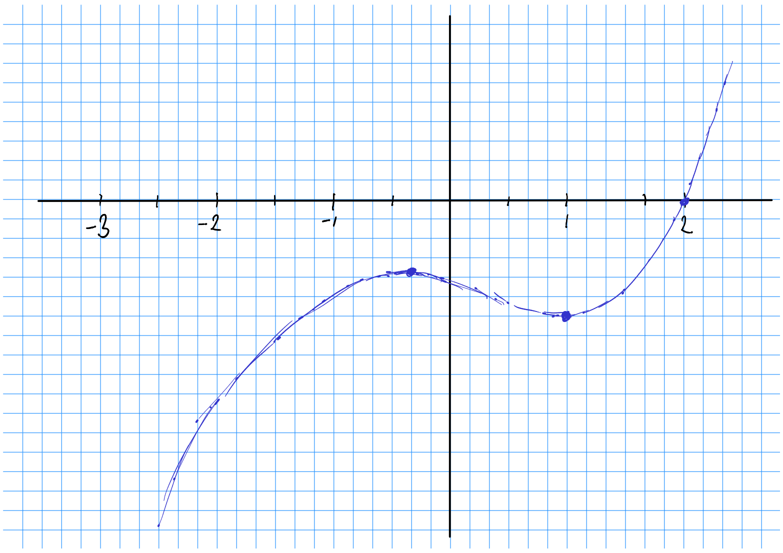
For å finna topp- og botnpunkt bruker me den deriverte. Det er enklast å derivera den ufaktoriserte formen.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Nullpunkt finn me med formelen for andregradslikningar som

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{cases} \tag{86}$$

Me skisserer kurva med dei tre punkta som me har funne x-verdien for.



Merknad 12.3. Merk at me ikkje har rekna ut y-verdiar eller markert nøyaktige talverdiar i skissa i den siste løysinga. I mange av dei tidlegare løysingane har me teke det med, sjølv om oppgåva ikkje har spurt om det. Begge delar er greitt. So lenge figuren ikkje vert overlessa og uleseleg, og ein har med alt ein vert spurd om, so er resten ei smaksak.

Øvingsoppgåve 12.19. Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Det er mogleg å visa at dette kan faktoriserast som

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2)$$

Marker topp- og botnpunkta og skjæringspunkta med aksane.

12.4 Vidare lesing†

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.3-3.4, 3.8, 3.12, 3.13

13 Veke 12. Den andrederiverte

13.1 Den deriverte av høgare orden

Eksempeloppgåve 13.1. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4, \tag{87}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2. \tag{88}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

Løysing 13.1. Legg merke til at $f'(x)$ er ein funksjon. Drøfting av $f'(x)$ vert det same som drøfting av einkvan annan andregradsfunksjon. Dvs. at me kan derivera han, slik

$$f''(x) = 6x - 4. \tag{89}$$

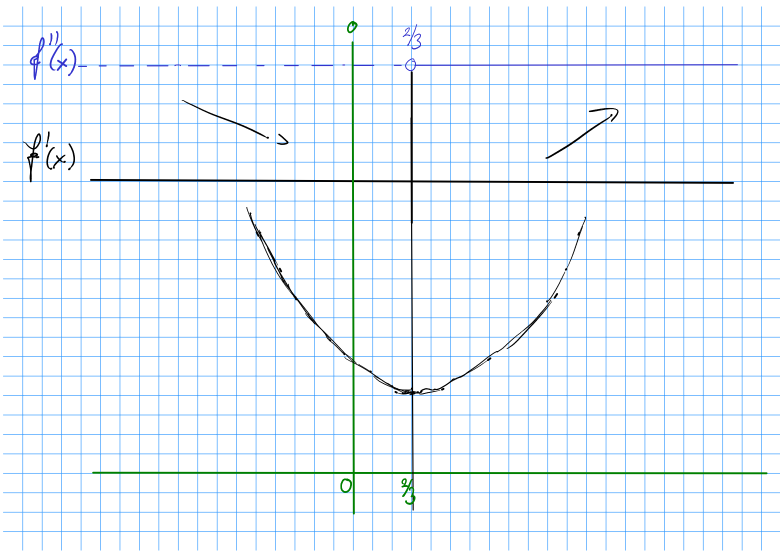
Me har $f''(x) = 0$ for $x = 2/3$, og $f''(x)$ byter forteikn. Difor har $f'(x)$ eit ekstremalpunkt for $x = 2/3$.

Nullpunkta åt $f'(x)$ finn me med formel, som fylgjer

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6} \tag{90}$$

Her er inga løysing, so $f'(x)$ har ingen nullpunkt.

Me kan teikna forteiknsdiagram for $f'(x)$ og $f''(x)$. Forteikna for $f''(x)$ viser at $f'(x)$ fyrst fell og so stig. Dette kan me bruka som utgangspunkt for å skissera $f'(x)$ som vanleg i koordinatsystemet.



Øvingsoppgåve 13.2. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2, \tag{91}$$
$$f'(x) = -3x^2 + 2x. \tag{92}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

Merknad 13.1. Over har me funne den deriverte av den deriverte til ein funksjon $f(x)$. Funksjonen $f''(x)$ kallar me gjerne for den *andrederiverte*, eller den *dobbelderiverte*, av $f(x)$.

Eksempeloppgåve 13.3. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1, \tag{93}$$
$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x. \tag{94}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

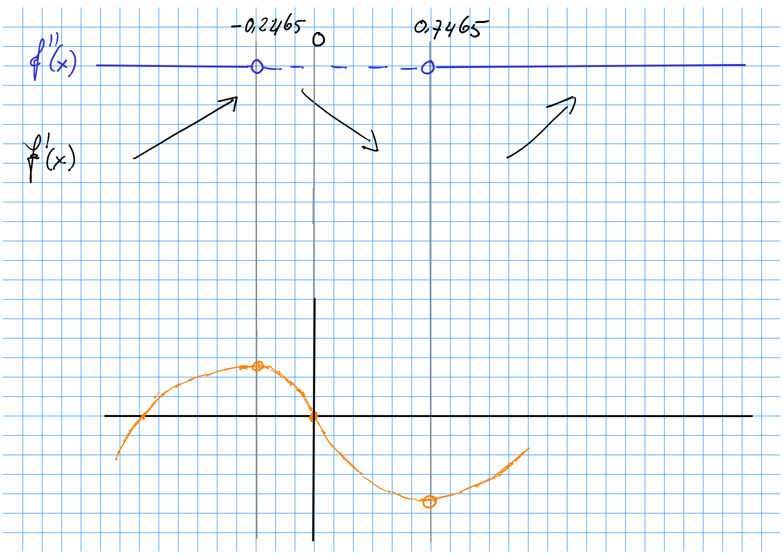
Løysing 13.2. Me drøftar $f'(x)$ som einkvan annan tredjegradsfunksjon. Derivasjon gjev

$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 2. \tag{95}$$

Nullpunkt for $f''(x)$ er

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 12 \cdot (-2)}}{2 \cdot 12} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 96}}{24} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{132}}{24} = \begin{cases} 0{,}7287 \\ -0{,}2287 \end{cases} \tag{96}$$

Sidan andregradsleddet er positivt, har andregradsfunksjonen botnen ned. Då kan me teikna forteiknsdiagram, og skissera $f'(x)$ basert på det.



Me har markert nullpunkt i origo, sidan det er lett å sjå at alle ledda i $f'(x)$ er delelege med x. Dei andre nullpunkta har me ikkje rekna ut.

Øvingsoppgåve 13.4. Me har funksjonen $f(x)$ med den deriverte:

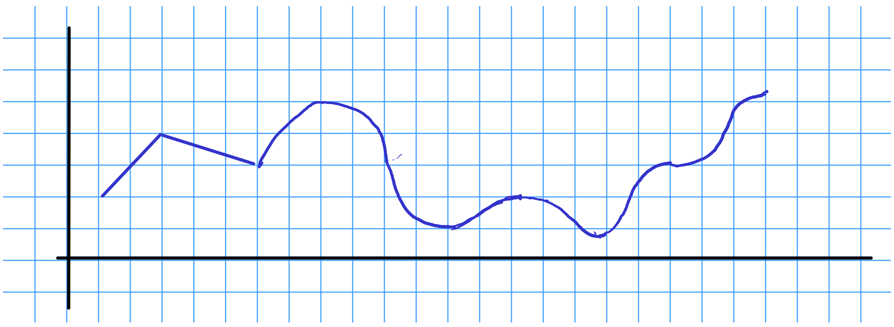
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2, \tag{97}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x. \tag{98}$$

Drøft og skissér $f'(x)$.

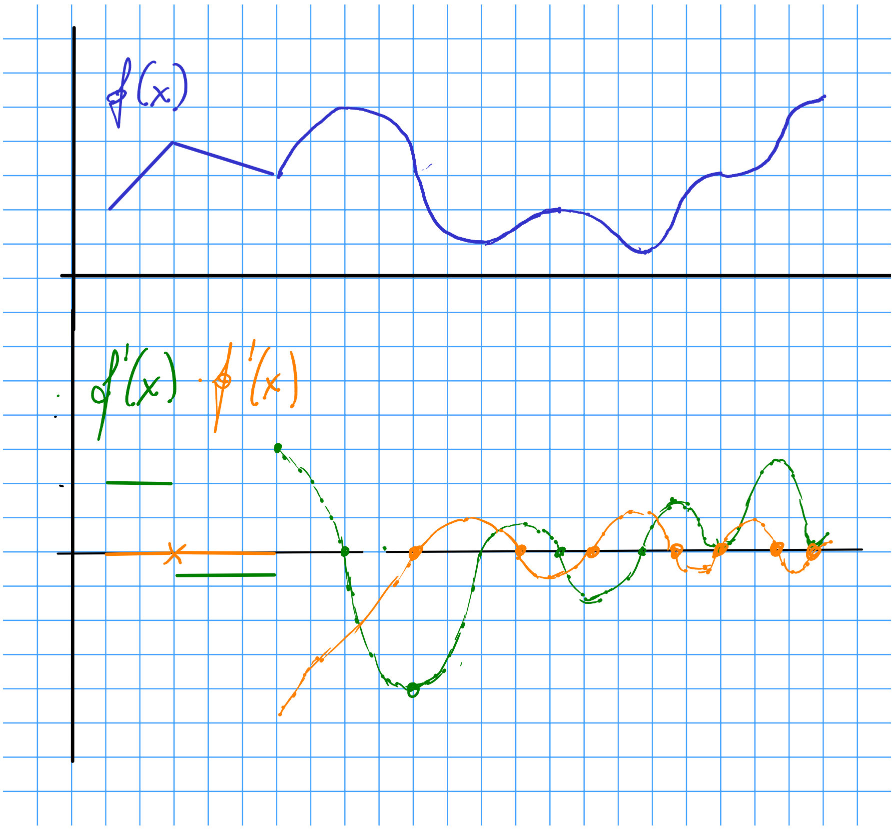
13.2 Krumming

Eksempeloppgåve 13.5. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



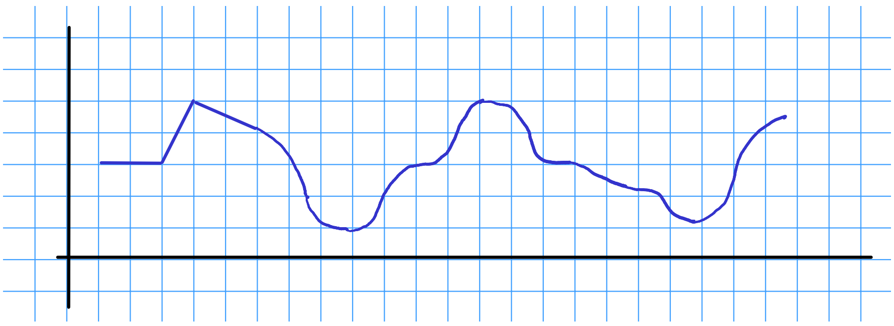
Skissér $f'(x)$ og $f''(x)$ basert på kurva over.

Løysing 13.3. Me skisserer $f'(x)$ basert på $f(x)$ slik at $f'(x)$ får positiv verdi når $f(x)$ fell og negativ når $f(x)$ stig. Me skisserer $f''(x)$ på same måte basert på $f(x)$.



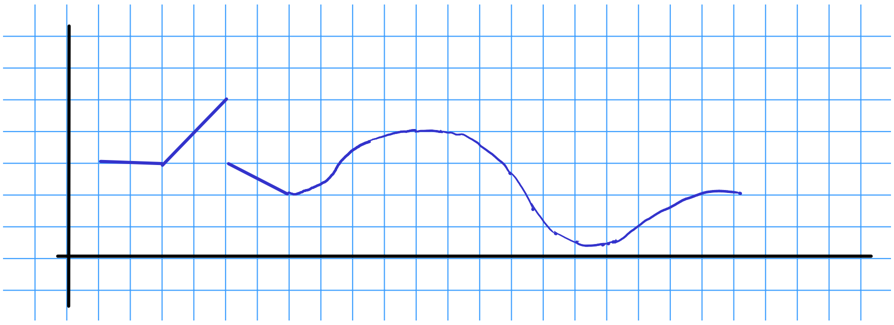
Merk at skissa ikkje er perfekt, men me kan sjå nokonlunde kvar $f'(x)$ og $f''(x)$ har null-, topp- og botnpunkt. Me kan òg sjå kvar dei er konstante. Legg merke til $\times$-ane, som viser punkt der $f''(x)$ er udefinert.

Øvingsoppgåve 13.6. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



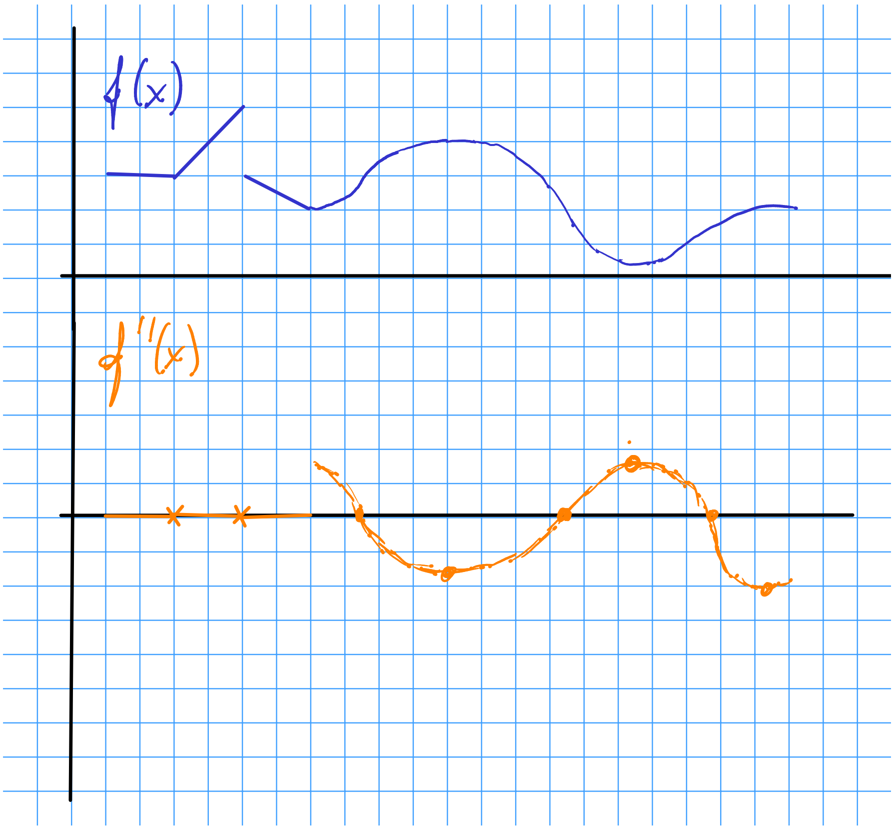
Skissér $f'(x)$ og $f''(x)$ basert på kurva over.

Eksempeloppgåve 13.7. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:



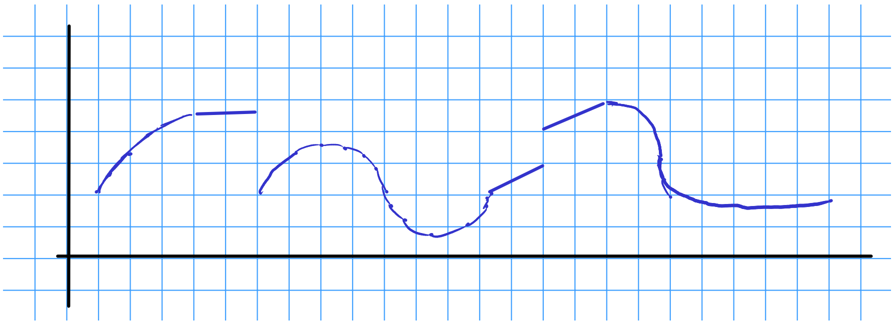
Skissér $f''(x)$ basert på kurva over.

Løysing 13.4. Me skisserer $f''(x)$ basert på $f(x)$ slik at $f''(x)$ er positiv når $f(x)$ krummar oppover og negativ når $f(x)$ krummar nedover.



Merk at skissa ikkje er perfekt, men me kan sjå nokonlunde kvar $f''(x)$ har null-, topp- og botnpunkt. Me kan òg sjå kvar dei er konstante. Legg merke til $\times$-ane, som viser punkt der $f''(x)$ er udefinert.

Øvingsoppgåve 13.8. Ein funksjon $f(x)$ er gjeven som fylgjande kurve:

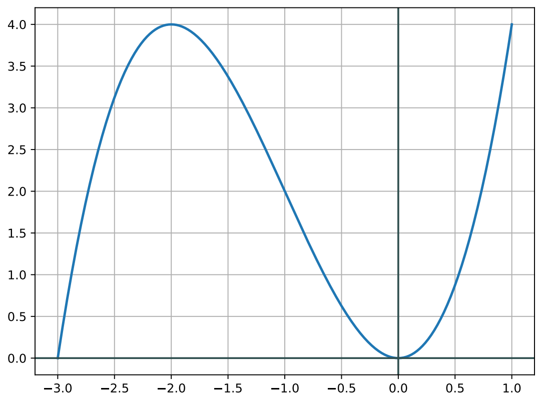


Skissér $f''(x)$ basert på kurva over.

13.3 Vendepunktet

Eksempeloppgåve 13.9. Sjå på funksjonen $f(x) = x^3 + 3x^2$. Denne funksjonen har eit lokalt maksimum for $x = -2$ og lokalt minimum for $x = 0$. Sjå på kurva på intervallet $-2 < x < 0$. Kvar er ho brattast?

Løysing 13.5. Lat oss plotta i full fart.



Kurva er openbert slak nær ekstremalpunkta. Det ser ut som om ho er brattast midt mellom topp- og botnpunktet, altso ved $x = -1$, men for å vera sikker på at svaret er nøyaktig er det best å bruka algebra.

Målet for bratte er stigningstalet åt tangenten, altso den deriverte:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x.$$

Me veit allereie frå oppgåva og plottet at $f'(-2) = f(0) = 0$ og at $f'(0) < 0$ for $-2 < x < 0$, men kvar er $f'(x)$ minst (mest negativ)?

For å finna minimumspunktet åt $f'(x)$, deriverer me igjen

$$f''(x) = 6x + 6.$$

Me ser at $f''(-1) = 0$. Dette er altso minimumspunktet åt $f'(x)$ og det brattaste punktet nedover på $f(x)$. Dette punktet vert òg kalla *vendepunktet* åt $f(x)$.

Merknad 13.2 (Vendepunkt)**.** I figuren ser me korleis kurva krummar med hulsida ned til venstre for vendepunktet og hulsida opp til høgre for vendepunktet. Den andrederiverte byter forteikn i vendepunktet. Han er negativ til venstre, der $f'(x)$ vert mindre og mindre og lagar hulside ned på $f(x)$. Han er positiv til høgre, der $f'(x)$ vert større og lagar hulside opp på $f(x)$.

Øvingsoppgåve 13.10. Sjå på funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Denne funksjonen har eit lokalt maksimum for $x = 0$ og lokalt minimum for $x = 2$. Sjå på kurva på intervallet $0 < x < 2$. Kvar er ho brattast?

Eksempeloppgåve 13.11. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x$. Marker vendepunktet med x- og y-verdi.

Løysing 13.6. Me finn den deriverte

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3.$$

Nullpunkta åt $f'(x)$ finn me med formelen for andregradslikningar

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = -2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{108} = \begin{cases} -3{,}732 \\ -0{,}268 \end{cases} \tag{99}$$

Dette er ekstremalpunkta åt $f(x)$.

Me kan finna vendepunktet ved å setja den andrederivert lik null:

$$0 = f''(x) = 6x + 12.$$

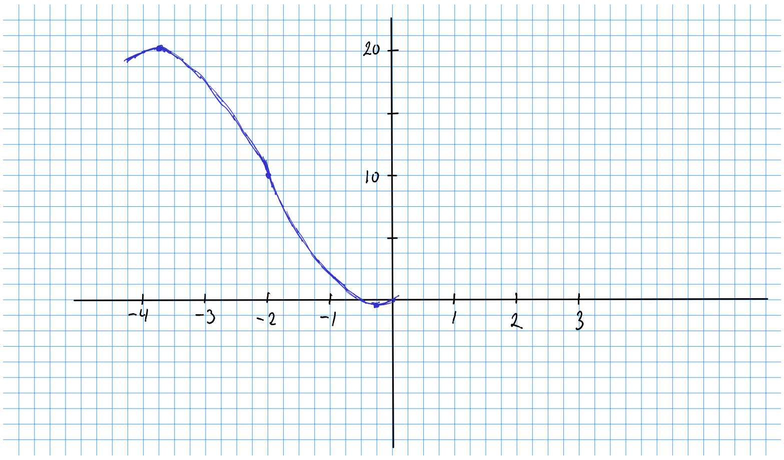
Me løyser likninga

$$0 = 6x + 12, \tag{100}$$
$$6x = -12, \tag{101}$$
$$x = -2. \tag{102}$$

Me kan finna funksjonsverdien i dei tre interessante punkta:

$$f(-3{,}732) = 20{,}39 \tag{103}$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -8 - 12 + 1 = 10 \tag{104}$$
$$f(-0{,}268) = -0{,}392 \tag{105}$$

Då har me fylgjande plott.



Øvingsoppgåve 13.12. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$. Marker vendepunktet med x- og y-verdi.

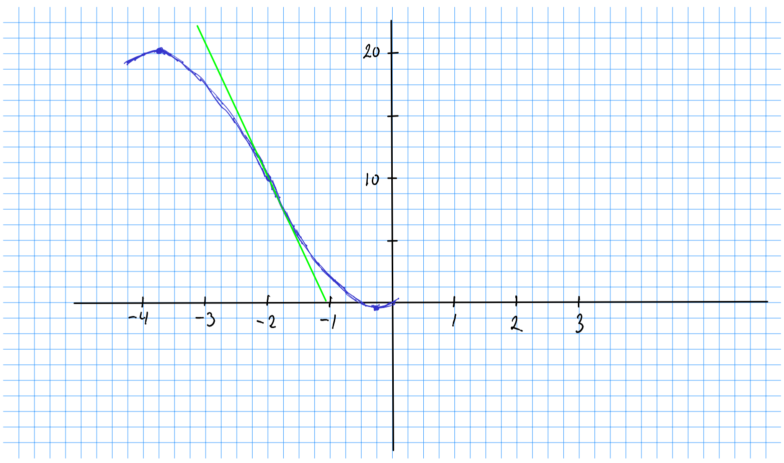
13.4 Vendetangenten

Eksempeloppgåve 13.13. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x$. Finn ei likning for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

Løysing 13.7. Me kan ta utgangspunkt i skissa frå oppgåve 13.11. Vendetangenten går gjennom vendepunktet $(-2, 10)$ og har stigningstalet

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 3 = 12 - 24 + 3 = -9.$$

Dette kan me teikna som fylgjer.



Likninga for vendetangeten er $y = -9x + b$ for ein eller annan konstant b. Me kan bruka vendepunktet, med $x = -2$ og $y = 10$. Når me set inn ser me at $10 = -9 \cdot (-2) + b$ eller

$$10 = 18 + b.$$

Dette stemmer for $b = -8$. Dersom me forlengar tangenten i skissa, ser me at det stemmer godt. Likninga for vendetangenten er

$$y = -9x - 8.$$

Øvingsoppgåve 13.14. Drøft og skisser funksjonen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x$. Finn ei likning for vendetangenten og teikn vendetangenten i skissa.

13.5 Vidare lesing

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.8 og 3.12

Øvingsoppgåve 13.15 (†)**.**

Oppgåve 3 frå eksamen våren 2018.

Øvingsoppgåve 13.16 (†)**.**

Oppgåve 3-4 frå eksamen november 2015.

14 Veke 13. Kostnadsoptimum

Merknad 14.1 (Kostnadsoptimum)**.** Dersom me har ein kostnadsfunksjon $K(x)$, kan me definera einingskostnaden, eller gjennomsnittskostnaden, som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

Kostnadsoptimum er minimumspunktet for einingskostnaden.

14.1 Utan faste kostnader

Eksempeloppgåve 14.1. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

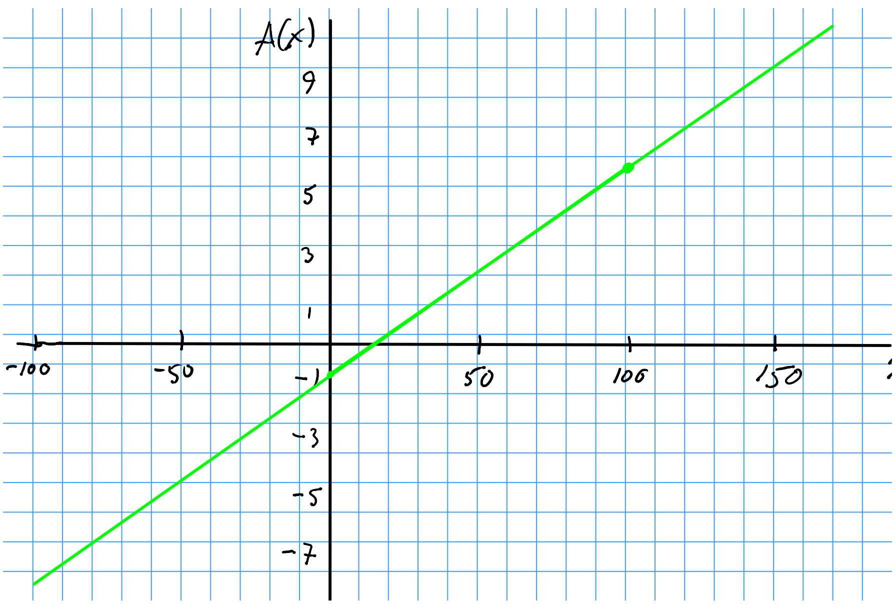
$$K(x) = 0{,}07x^2 - x.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 14.1. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}07x - 1.$$

Dette er ein lineær funksjon, og skissa vert ei rett line.



Funksjonen $A(x)$ er monotont stigande, so den lågaste gjennomsnittskostnaden får me når x er minste moglege (meiningsfulle) verdi. Merk at $A(x) = K(x)/x$ ikkje er definert for $x = 0$ sidan me ikkje kan dela på 0. Me kan ta ein verdi vilkårleg nær 0, og få ein gjennomsnittskostnad vilkårleg nær -1, men negativ kostnad gjev heller ikkje særleg meining. Ein får gå ut frå at $K(x)$ ikkje var meint for små verdiar av x.

Kostnadsoptimum gjev ikkje særleg meining i denne oppgåva.

Øvingsoppgåve 14.2. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}05x^2 + 2x.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$. Kva kan me seia om kostnadsoptimumet?

14.2 Den lineære kostnadsfunksjonen

Eksempeloppgåve 14.3. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 10x + 50.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 14.2. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 10 + \frac{50}{x}.$$

Lat oss fyrst analysera dei variable og dei faste kostnadene kvar for seg. Me skriv

$$A_1(x) = 10, \tag{106}$$

$$A_2(x) = \frac{50}{x}, \tag{107}$$

$$A(x) = A_1(x) + A_2(x). \tag{108}$$

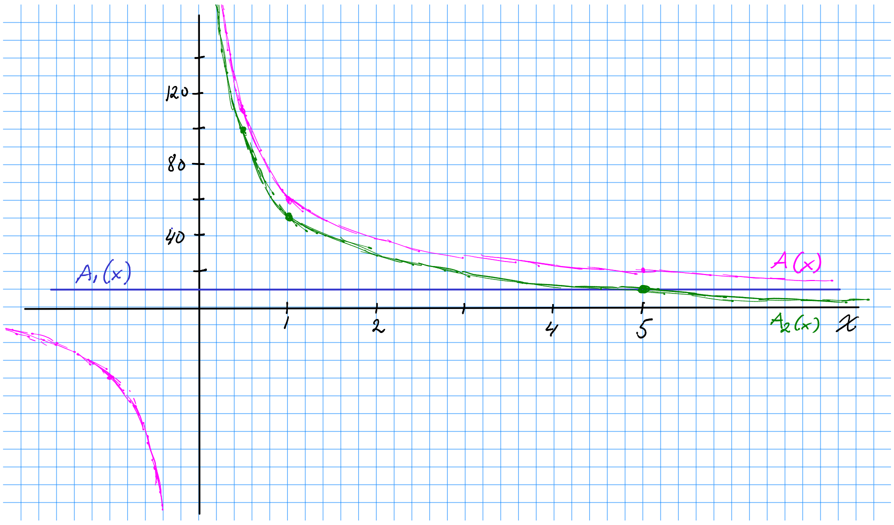
Legg merke til at $A_2(x)$ er udefinert for $x = 0$, men kva skjer når $x \to 0^+$, dvs. når x er positiv og nærmar seg 0. Når me deler på eit stadig mindre tal, vert brøken stadig større, so $A_2(x) \to \infty$. Omvendt kan me sjå, når $x \to \infty$, at $A_2(x) \to 0^+$.

Me ser òg at $A_1(x)$ er konstant, dvs. ei vassrett line, og me kan skissera $A_1(x)$ og $A_2(x)$ i diagrammet.

Rekneregel 14.1 Den deriverte av $1/x$.

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{109}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{110}$$



I skissa ser me korleis kurva åt $A_2(x)$ nærmar seg x-aksen når $x \to \infty$, og y-aksen når $A_2(x) \to \infty$. Me har òg skissert $A(x)$. Sidan $A(x)$ er summen av $A_2(x)$ og $A_1(x) = 10$, vert kurva lik $A_2(x)$ flytta ti steg opp langs y-aksen.

Me har skissert funksjonen for negative verdiar av x for å illustrera korleis slike funksjonar ser ut generelt. Sidan negativt produksjonsvolum ikkje gjev meining, er dette ikkje relevant for kostnadsfunksjonar.

Kostnadsoptimumet er ikkje definert her. Den lågaste einingskostnaden får me når $x \to \infty$.

Øvingsoppgåve 14.4. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 2x + 100.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Kva kan me seia om kostnadsoptimumet?

14.3 Kostnadsoptimum †

Eksempeloppgåve 14.5. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}07x^2 - x + 50.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Løysing 14.3. Gjennomsnittskostnaden er gjeven som

$$A(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}07x - 1 + \frac{50}{x}$$

Lat oss fyrst analysera dei variable og dei faste kostnadene kvar for seg, slik som me gjorde i oppgåve 14.1. Me skriv

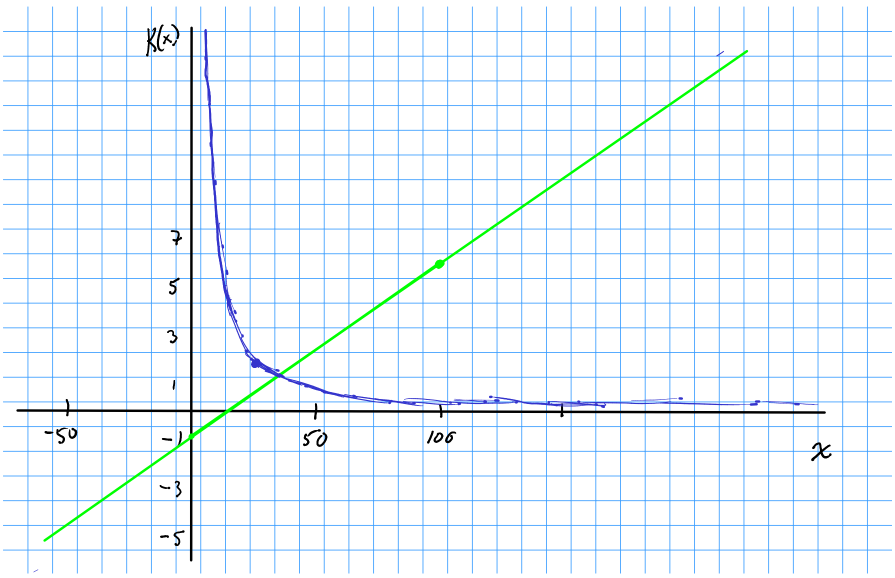
$$A_1(x) = 0{,}07x - 1, \tag{111}$$

$$A_2(x) = \frac{50}{x}, \tag{112}$$

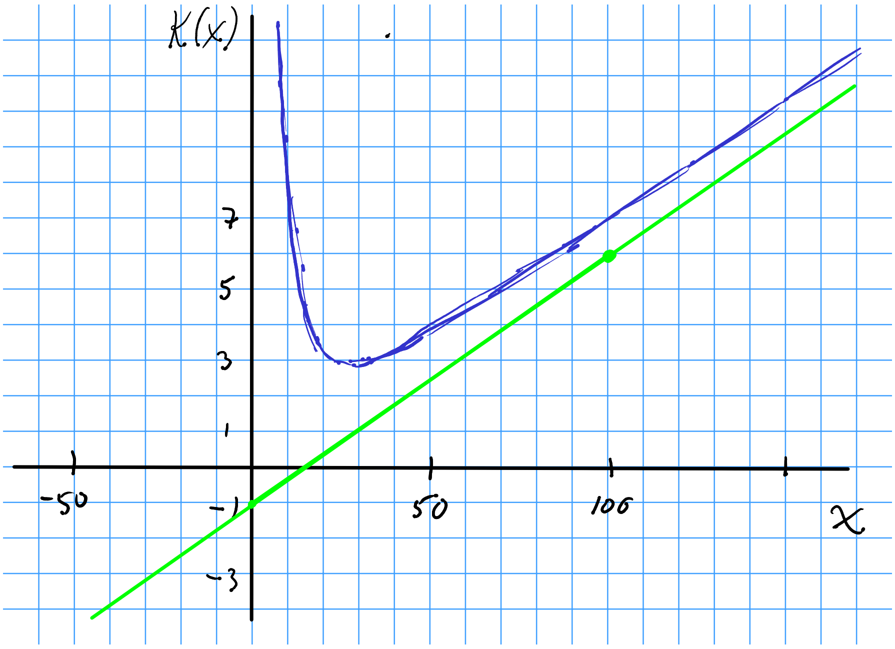
$$A(x) = A_1(x) + A_2(x). \tag{113}$$

Gjennomsnittet av dei faste kostnadene, $A_2(x)$, er den same funksjonen som i oppgåve 14.1. Han er udefinert for $x = 0$, og $A_2(x) \to \infty$ når $x \to 0^+$. Når $x \to \infty$, får me $A_2(x) \to 0^+$.

Gjennomsnittet $A_1(x)$ av dei variable kostnadene er denne gongen lineært, men ikkje konstant. Me kan skissera $A_1(x)$ og $A_2(x)$ som fylgjer.



Dersom me legg saman $A_1(x)$ og $A_2(x)$ skulle me få u nokonlunde fylgjande plott.



Det ser ut som om me har eit botnpunkt, so lat oss studera det litt nærare ved hjelp av den deriverte. Då treng med rekneregel 14.1. Me kan derivera ledd for ledd, so me har

$$A(x) = 0{,}07x - 1 + 50 \cdot \frac{1}{x} \tag{114}$$

$$A'(x) = 0{,}07 + 50 \cdot \big(-\frac{1}{x^2}\big) = 0{,}07 - \frac{50}{x^2} \tag{115}$$

Me må løysa likninga

$$0 = 0{,}07 - \frac{50}{x^2}. \tag{116}$$

Dette er ikkje ei vanleg andregradslikning, men me kan gonga gjennom med x^2 (føresett at $x \neq 0$):

$$0 \cdot x^2 = 0{,}07 \cdot x^2 - 50, \tag{117}$$

$$50 = 0{,}07 \cdot x^2 \tag{118}$$

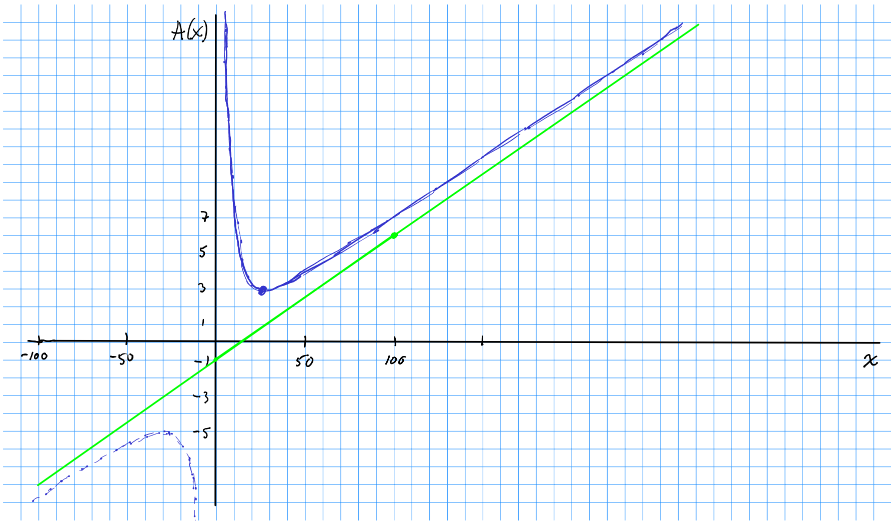
$$\frac{50}{0{,}07} = x^2 \tag{119}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{50}{0{,}07}} \approx \pm 26{,}73 \tag{120}$$

Den tilhøyrande y-verdien er

$$A(26{,}73) = 2{,}74 \tag{121}$$

Ved hjelp av dette punktet, kan me skissera funksjonen litt meir nøyaktig.



Den lågaste gjennomsnittskostnaden finn me når me produserer $x = 26{,}73$ einingar.

Øvingsoppgåve 14.6. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}05x^2 + 2x + 100.$$

Finn gjennomsnittskostnaden $A(x)$. Drøft og skisser $A(x)$ og finn kostnadsoptimumet.

Merknad 14.2 (Rasjonal funksjon)**.** Funksjonar på formen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der både $p(x)$ og $q(x)$ er polynom, vert kalla *rasjonale funksjonar*. Når kostnadsfunksjonen $K(x)$ er eit polynom, vert gjennomsnittskostnaden $A(x) = K(x)/x$ ein rasjonal funksjon, sidan x er eit polynom.

Øvingsoppgåve 14.7. Drøft og skisser funksjonen

$$A(x) = -x + 2 + \frac{1}{x}.$$

Finn maksimums- og minimumspunkta, og forklar kva som skjer når $x \to 0$ og når $x \to \pm\infty$.

Øvingsoppgåve 14.8. Drøft og skisser funksjonen

$$A(x) = -x + 2 - \frac{1}{x}.$$

Finn maksimums- og minimumspunkta, og forklar kva som skjer når $x \to 0$ og når $x \to \pm\infty$.

14.4 Grensekostnaden i optimum †

Eksempeloppgåve 14.9. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}1x^2 + x + 20.$$

Finn kostnadsoptimum. Rekn ut gjennomsnittskostnaden og grensekostnaden i kostnadsoptimum.

Løysing 14.4. Me må starta med gjennomsnittskostnadsfunksjonen

$$A(x) = 0{,}1x + 1 + \frac{20}{x}.$$

Optimum finn me ved å derivera:

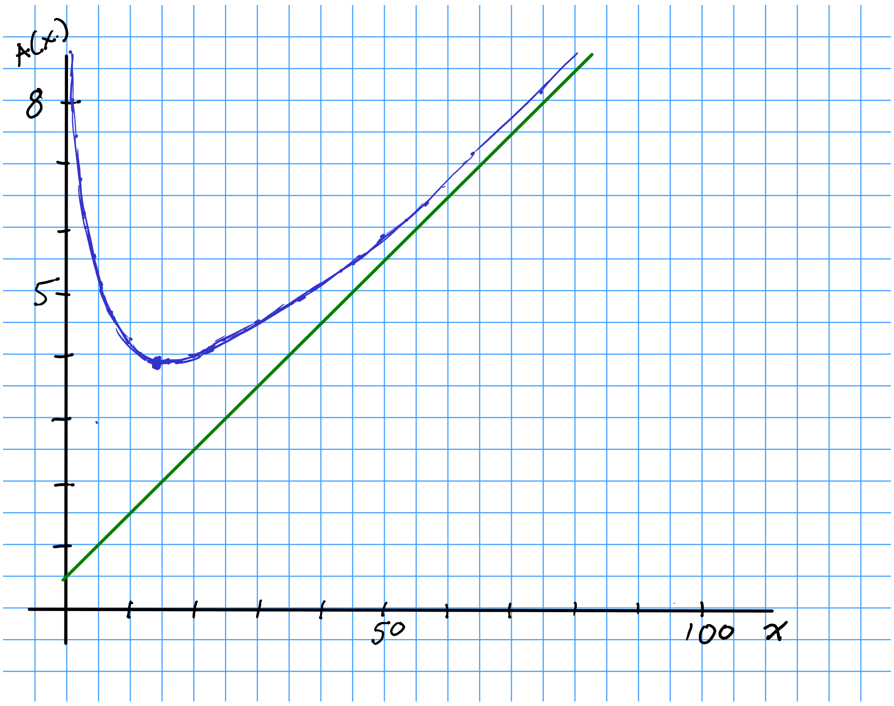
$$A'(x) = 0{,}1 - \frac{20}{x^2}.$$

Når me løyser likninga $A'(x) = 0$, får me

$$x^2 = 200.$$

Kostnadsoptimumet er altso $x = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$, og $A(14{,}1) \approx 3{,}8$.

Me skisserer funksjonen for å dobbelsjekke at kostnadsoptimumet faktisk er et minimum.



Me treng òg grensekostnaden

$$K'(x) = 0{,}2x + 1.$$

Verdiane i kostnadsoptimum er

$$K'(14{,}1) = 3{,}8 \tag{122}$$

$$A(14{,}1) = 3{,}8 \tag{123}$$

Øvingsoppgåve 14.10. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = 0{,}08x^2 - 2x + 100.$$

Finn kostnadsoptimum. Rekn ut gjennomsnittskostnaden og grensekostnaden i kostnadsoptimum.

Merknad 14.3. I desse oppgåvene var grense- og gjennomsnittskostnadene like i kostnadsoptimum. Når me ser slike «samantreff» lønar det seg å spørsja om det alltid er slik, og evt. kvifor det er slik.

Der finst eit algebraisk argument, men det konseptuelle argumentet er mest interessant.

Lat oss tenkja oss at prisen akkurat dekkjer gjennomsnittskostnaden i optimum og at prisen er konstant. Då går bedrifta akkurat i balanse. Dersom bedrifta endrar produksjonsvolumet frå optimum, so vil gjennomsnittskostnaden auka og bedrifta gå med underskot. Det vil seia at bedrifta ikkje berre står i kostnadsoptimum, men òg i profittoptimum.

I profittoptimum, må grensekostnaden vera lik prisen. Dersom grensekostnaden var høgare enn prisen, ville ein tena meir ved å redusera produksjone, og dersom grensekostnaden var lågare, vore der gevinst i auka produksjon. Difor er grensekostnaden lik prisen, som var lik gjennomsnittskostnaden.

Merknad 14.4. Nokon studentar og nokon bøker bruker regelen $A(x) = K'(x)$ for å finna kostnadsoptimum. Det funkar, men ein treng ikkje hugsa denne regelen. Den generelle metoden for å finna optimum ved hjelp av derivasjon ($A'(x) = 0$) fungerer for alle funksjonar, ogso $A(x)$.

Øvingsoppgåve 14.11. Ei bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = -0{,}01x^2 + 100x + 5.$$

Skisser funksjonen $A(x)$ for gjennomsnittskostnaden og finn kostnadsoptimum. Samanlikn med forrige oppgåve og drøft kor mykje bedrifta bør produsera.

14.5 Vidare lesing†

Lesing: Bjørnestad *et al*, kapittel 3.14–3.15

Øvingsoppgåve 14.12 (28. oktober)**.** Oppg. 3.47 og 3.49 i læreboka.

Øvingsoppgåve 14.13. Oppg. 3.48 og 3.50 i læreboka.

15 Veke 14.

16 Mappeoppgåver

Dei 3-4 hovudtemaa som de må dekkja i mappa kjem til syne i dei tre fyrste oppgåvene på gamle eksamenssett (hausten 2018 og seinare). Sjå avsnitt . Desse tre oppgåvene har definert eit kjernepensum som er tilstrekkeleg for karakteren C.

De skal kjenna igjen desse tre oppgåvene frå pensum. Ei oppgåve med ulike problem frå finansmatematikk. Ei oppgåve med funksjonsdrøfting som me gjekk gjennom 26. oktober. Ei oppgåve om kostnads- og inntektsfunksjonar. Denne kunne vore delt i to, med ei oppgåve for lineær kostnadsfunksjon og ei med kvadratisk, for å få fire tema i staden for tre.

Som det står i instruksen bør de ikkje levera oppgåver der eg har lagt ut løysingsforslag. Den enklaste måten å gjera det på er å ta ei oppgåve frå eksamen eller øvingsheftet og endra nokre tal.

Oppgåvene om kostnads- og inntektsfunksjonar og funksjonsdrøfting går over i kvarandre, og krev mange av dei same ferdigheitene. Det som skil dei er at kostnads- og inntektsfunksjonar legg vekt på samanhengen mellom funksjonsforståing og den bedriftsøkonomiske røynda meda funksjonsdrøfting legg vekt på samanhengen mellom rekning og teikning.

Dei ferdigheitene som skal sitja igjen frå desse to temaa saman er,

1. Finna balansen mellom inntekt og utgift, dvs. løysa likningar (av fyrste og andre grad).
2. Optimera, dvs. finna topp- og botnpunkt vha. derivasjon.
3. Setja opp kostnads-, inntekts- og profittfunksjonar basert på enkle opplysingar, og omvendt lesa slik informasjon (t.d. faste og variable kostnader) ut av funksjonen.
4. Bruka grense- og gjennomsnittskostnad i bedriftsøkonomiske resonnement.
5. Bruka skisser for å presentera forståing av funksjonen og for å fanga opp evt. feil i utrekninga.
6. intuitiv forståing av funksjonar (gjerne med skissa til hjelp), for å kunna sjå når funksjonen (t.d. kostnadane) aukar eller går ned.

Minimumskravet er å visa alle desse ferdigheitene saman med funksjonar av fyrste og andre grad, samt tredje grad utan konstantledd. Merk at ein må dekkja heile breidda for å stå i emnet. Den store skilnaden på karakterane E og C er at E kan tillata nokre hol innimellom (t.d. vendetangenten) og litt fragmenterte løysingar, medan C krev fullstendige svar og eit visst overblikk som samanhengar mellom ulike metodar og problemtypar. Dersom ein tek utgangspunkt i gamle eksamensoppgåver, krev ein C at ein svarer på alle delspørsmål og ser samanhengen mellom dei. Til ein E må ein svara på alle hovudoppgåvene og på eit klart fleirtal av delspørsmåla.

Utfordringa i år er ikkje å hugsa teknikkane på eksamen. De har alle hjelpemiddel og nær sagt uavgrensa tid, og kan difor gjera dykk langt meir flid slik at svara vert fullstendige og perfekte. Merk at det er viktigare å kunna presentera løysingar godt og tydeleg, enn å dekkja fleire ferdigheiter og funksjonstypar. Mao. det nyttar ikkje å streba etter vanskelege oppgåver for å få ein A dersom ein manglar oversikta og presentasjonskvaliteten som krevst for ein C.

Det vil vera vanskelegare å finna gode problem frå røynda i denne delen av pensum enn det var i finansmatematikken. Optimeringsproblem er vanlege, sjølv om det ikkje er lett å finna realistiske problem med funksjonar som er enkle nok. Ein kan òg sjå etter abstrakte oppgåver med meir avanserte funksjonar. Noko av dette er dekt i Veke 13 og Veke 14. Dette stoffet kan ein vidare utvida med andre funksjonar, t.d.

$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}, \tag{124}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \tag{125}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 1}, \tag{126}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 4x + 1}. \tag{127}$$

Læreboka kan gje andre gode idéar.

17 Fleire døme i Funksjonsdrøfting†

Oppgåvene i dette kapittelet er henta frå eksamen hausten 2017, men nokre av løysingsforslaga er utvida med meir detaljar og sensurinstruksjonar.

Som alltid, svar på oppgåvene med tanke på å forklara medstudentane korleis du tenkjer og overtyda dei om at løysinga er rett.

Det er ikkje eit mål å velja same løysingsmetode som eksaminator. Der er som regel mange vegar til målet.

17.1 Tema 2: Kostnads- og inntektsfunksjonar

Oppgåvene nedanfor er henta frå tidlegare eksamensoppgåver, men løysingsforslaga er skrivne om som sensorrettleiingar slik dei vil verta brukt framover.

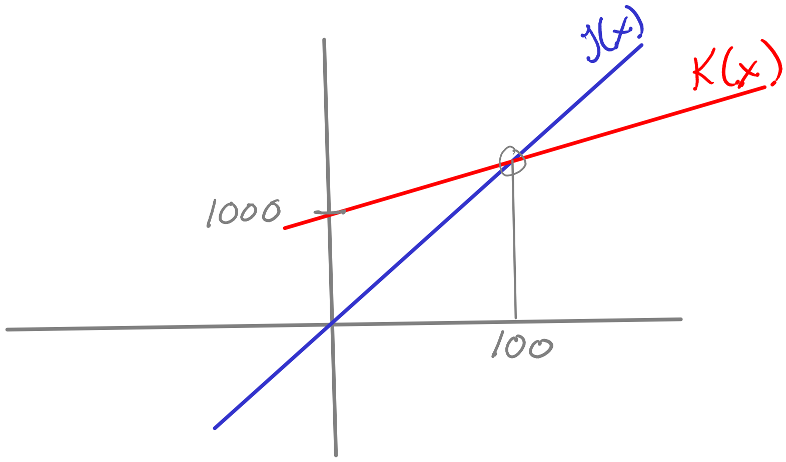
Eksempeloppgåve 17.1 (Eksamen hausten 2017, oppg. 5)**.** Ålesund Dings og Profitt AS sel dingsar. Utgiftene deira er 10 kr. per produsert dings, pluss 1000 kr. dagen i faste utgifter (uavhengig av produksjonsvolumet).

1. Finn eit uttrykk for kostnadsfunksjonen $K(x)$.
2. Kvar dings vert solgt for 20kr. Finn eit uttrykk for inntektsfunksjonen $I(x)$.
3. Skissér båe funksjonane $I(x)$ og $K(x)$ i same koordinatsystem. Hugs å merka kva kurve som svarer til kva funksjon i teikninga.
4. Finn eit uttrykk for profittfunksjonen $P(x)$.
5. Finn produksjonsvolumet x som gjev balanse i drifta (korkje overskot ellet underskot). Vis utrekninga og markér løysinga i skissa frå forrige deloppgåve.

Løysing 17.1. *Del 1.* Me legg saman dei totale variable kostnadane for x dingsar med dei faste kostnadene og får kostnadsfunksjonen $K(x) = 10x + 1000$

Del 2. 20 kr. per eining vert $I(x) = 20x$ kroner for x einingar.

Del 3. Dette gjev fylgjande skisse:



Del 4. Profitten er overskotet når me trekk utgiftene frå inntektene, altso $P(x) = I(x) - K(x) = 10x - 1000$

Del 5. Balanse i drifta vil seia at $P(x) = 0$, eller mao.

$$10x - 1000 = 0$$

Dette gjev

$$10x = 1000$$

eller

$$x = \frac{1000}{10} = 100$$

Bedrifta går i balanse når dei produserer 100 einingar.

Merknad 17.1. Heilskapsforståing er vesentleg i kurset og i denne oppgåva skal ein leggja vekt på at figuren er konsistent med dei øvrige svara. Spesielt er ikkje svaret på del 5 fullstendig utan at likevektspunktet er markert i figuren for del 3. Av same grunn skal ein trekkja mykje for simple reknefeil (slurvefeil) som burde ha vore oppdaga ved hjelp av skissa og som korkje er retta eller kommentert. (I andre tilfelle kan slike slurvefeil dømmast lett.)

Eksempeloppgåve 17.2 (Eksamen hausten 2017, oppg. 6)**.** Ei anna bedrift har kostnadsfunksjonen

$$K(x) = x^2 + 10x + 30.$$

1. Finn eit uttrykk for grensekostnaden $K'(x)$?
2. Finn eit uttrykk for gjennomsnittskostnaden $A(x)$ når bedrifta produserer x dingsar?

Sjå no på tilfellet der bedrifta leverer $x = 10$ dingsar.

3. Finn gjennomsnittskostnaden for $x = 10$

4. Finn grensekostnaden for $x = 10$
5. Kva må utsalsprisen vera for at bedriften skal gå med overskot?
6. Kva må utsalsprisen vera for at det skal løna seg å auka produksjonen?

Løysing 17.2. *Del 1.* Grensekostnaden er det same som den deriverte av kostnadsfunksjonen, altso $K'(x) = 2x + 10$.

Del 2. Gjennomsnittskostnaden per eining er totalkostnad delt på talet på einingar:

$$A(x) = x + 10 + \frac{30}{x}$$

Del 3. Me set inn i funksjonen og får at gjennomsnittskostnaden er

$$A(10) = 10 + 10 + \frac{30}{10} = 23$$

Del 4. Me set inn i funksjonen og får at grensekostnaden er

$$K'(10) = 2 \cdot 10 + 10 = 30$$

Del 5. Han må meir enn dekkja gjennomsnittskostnaden. Prisen må altso vera meir enn 23 (kroner).

Del 6. Han må dekkja grensekostnaden. Prisen må altso vera meir enn 30 (kroner).

Merknad 17.2. I del 6 kan ein diskutera om 30 eksakt er tilstrekkeleg eller ikkje, men det er ikkje verd å gjera det her. Svaret må reknast som like rett uansett om ein skriv meir enn

Merknad 17.3. Svara i denne oppgåva må vurderast samla, slik at fylgjefeil ikkje vert straffa. Dei siste to spørsmåla legg vekt på at studenten klarer å tolka matematiske resultat tilbake i det praktiske problemet, og denne evna er i stor grad uavhengig av evna til å rekna rett i spørsmåla over.

17.2 Tema 3: Funksjonsdrøfting

Oppgåvene nedanfor er henta frå tidlegare eksamensoppgåver, men løysingsforslaga er skrivne om som sensorrettleiingar slik dei vil verta brukt framover.

Eksempeloppgåve 17.3 (Eksamen hausten 2017, oppg. 3)**.** Drøft og skissér funksjonen

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x.$$

Svar på fylgjande spørsmål, og markér svaret både i skissa og i teksta.

1. Finn ekstremalpunkta (maksimum og minimum) åt funksjonen. Bestem x- og y-verdiane til ekstremalpunkta.
2. Finn nullpunkta åt funksjonen.
3. For kva x-verdiar er funksjonen stigande?
4. For kva x-verdiar er funksjonen positiv? Dvs. $f(x) > 0$.
5. Finn vendepunktet til $f(x)$. Vis både x- og y-verdien.
6. Kva skjer med funksjonsverdien $f(x)$ når $x \to \infty$?

Merknad 17.4. Det vesentlege i denne oppgåva er å sy saman alle delsvara til ein heilskap, slik at skissa vert konsistent. Studentane skal visa heilskapsforståing. Ein god tommelfingerregel er å leggja lik vekt på den algebraiske løysinga og på skissa.

Merknad 17.5. Det er smak og behag kva rekkjefylgje ein løyser deloppgåvene i. Her startar me med ekstremalpunkta.

Løysing 17.3. *Del 1.* Lat oss derivera

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x \tag{128}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1 \tag{129}$$

I eventuelle ekstremalpunkt har me $f'(x) = 0$, altso

$$0 = -3x^2 + 4x - 1, \tag{130}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-6}, \tag{131}$$

$$x = \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{132}$$

Med to ekstremalpunkt i ein tredjegradsfunksjon, må det eine vera toppunkt og det andre botnpunkt. Me finn y-verdiane ved innsetjing

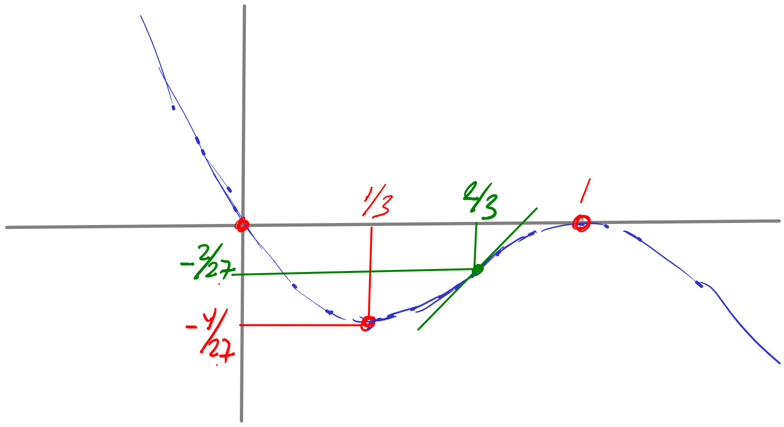
$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3^3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{6}{27} - \frac{9}{27} \\ &= \frac{-1+6-9}{27} = -\frac{4}{27} \end{aligned} \tag{133}$$

$$f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 0 \tag{134}$$

Del 2. For å få skissa presis kan me godt finna nullpunkta med ein gong. Då faktoriserer me funksjonen som fylgjer:

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x = x(-x^2 + 2x - 1) \tag{135}$$

Her får me altso nullpunkt for $x = 0$ og for $-x^2 + 2x - 1 = 0$. Den siste likninga kan med løysa med formel, og då finn me eitt nullpunkt, for $x = 1$. Me har altso to nullpunkt $x = 0$ og $x = 1$. Det siste fell saman med eit ekstremalpunkt. Når me teiknar null- og ekstremalpunkta fylgjer formen på kurva, og me skisserer som fylgjer:



Vendepunktet er rekna ut under.

Del 3. Me ser av skissa at funksjonen er stigande når $1/3 < x < 1$. Sidan me veit at ein tredjegradsfunksjon berre har eitt topp- og eitt botnpunkt, må dette vera det einaste området der funksjonen er stigande.

Del 4. Me ser av skissa at funksjonen er positiv for $x < 0$. Sidan me kjenner formen på tredjegradsfunksjonen, med eitt topp- og botnpunkt, veit me at han er positiv i heile området til venstre for 0.

Del 5. Vendepunktet er bestemt av $f''(x) = 0$. Dette gjev

$$f''(x) = -6x + 4 = 0$$

eller $x = 2/3$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= -\frac{2^3}{3^3} + 2 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{24}{27} - \frac{18}{27} \\ &= \frac{-8 + 24 - 18}{27} = -\frac{-2}{27} \end{aligned} \tag{136}$$

Dette markerer me i skissa.

Del 6. For store verdiar av x er tredjegradsleddet dominerande, pga. forteiknet vert dette negativt. Dermed har med $f(x) \to -\infty$ når $x \to \infty$, og skissa stadfestar det.

Merknad 17.6. Skissa som er kravd i oppgåva legg godt til rette for å dobbelsjekka alle svar. Ein skal ikkje krevja at studentane viser at dei dobbeltsjekkar svara sine, men dei bør gjera det. Fordi oppgåva legg so godt til rette for å dobbelsjekka svara, skal ein straffa slurvefeil strengt i denne oppgåva, med mindre inkonsistensen er kommentert.

Merknad 17.7. Dersom me er i tvil, kan me stadfesta løysingane ved å forteiknsdrøfta. I del 3 vil ein i so fall forteiknsdrøfta $f'(x)$, og i del 4 $f(x)$.

Merknad 17.8. I del 3, 4 og 6 kan ein bruka skissa som argument, men for å få full uttelling skal ein ha eit argument for at der ikkje kan skje noko uventa utanfor skissa. Dette kan ein gjera ved å visa til den velkjente formen som tredjegradskurva har, utan å verta særleg formell. (Jfr. løysingsforslaget for Del 3–4.)

Referansar

Ruth C Clark, Frank Nguyen, and John Sweller. *Efficiency in Learning: Evidence-Based Guidelines to Manage Cognitive Load*. Pfeiffer, San Francisco, 2005.

Warren Colburn. *First lessons in arithmetic on the plan of Pestalozzi: With some improvements*. Cummings and Hilliard, second edition, 1822.

Gertrude Hendrix. A new clue to transfer of training. *The Elementary School Journal*, pages 197–208, 1947.

Philip A. Neher. *Natural resource economics. Conservation and exploitation.* 1990.

Mogens Niss and Tomas Højgaard. Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark. Technical report, IMFUFA, Roskilde university, 2011.

Johann Heinrich Pestalozzi. *Leonard and Gertrude*. D.C. Heath & Co, Boston, 1908. Translated and abridged by Eva Channing.

S. Sæbø, T. Almøy, and H. Brovold. Does academia disfavor contextual and extraverted students? In *MNT-konferansen*, 2015. Bergen, Norway 18-19 March 2015.

Steinar Thorvaldsen. *Matematisk kulturhistorie*. Eureka forlag, 2002.